

# **Analysis 1**

Jan Pöschko

auf Grundlage der Vorlesung von  
Univ.-Prof. Robert Tichy  
und  
Univ.-Prof. Peter Grabner  
im Wintersemester 2005/2006

13. Dezember 2006

## Inhaltsverzeichnis

1	Ungleichungen	3
2	Folgen	3
3	Reihen	3
4	Funktionen	4
5	Grenzwertberechnung	4
6	Exponentialfunktion	5
7	Trigonometrische Funktionen	6
8	Hyperbolische Funktionen	7
9	Zyklometrische Funktionen	8
10	Areafunktionen	9
11	Differenzieren	10
12	Kurvendiskussion	10
13	Integrieren	11

# 1 Ungleichungen

## 1.1 Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung

Seien  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Dann gilt:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

## 1.2 Bernoulli-Ungleichung

Für  $x > -1$  und  $r > 0$  gilt:

$$(1+x)^r \begin{cases} \geq 1+rx & \text{wenn } r \geq 1 \\ \leq 1+rx & \text{wenn } r \leq 1 \end{cases}$$

## 1.3 Hölder-Ungleichung

Für  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  und  $p, q > 0$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Spezialfall  $p = q = 2$ : Cauchy-Schwarz-Ungleichung

## 1.4 Minkowski-Ungleichung

Für  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  und  $p \geq 1$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Spezialfall  $p = 2$ : Dreiecksungleichung im euklidischen Raum

# 2 Folgen

## 2.1 Häufungspunkte

Eine Zahl  $x \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt einer Folge  $(a_n)$ , falls in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(x_0) = \{x : d(x, x_0) < \varepsilon\}$  von  $x_0$  unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n \in U_\varepsilon(x_0)$$

## 2.2 Grenzwerte

Definiere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k : k \geq n\})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{a_k : k \geq n\}).$$

Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  ist also genau dann der Limes superior einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für fast alle Indizes  $n \in \mathbb{N}$  (d.h. für alle bis auf endlich viele) gilt

$$a_n < a + \varepsilon.$$

2. Es gibt unendlich viele Indizes  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$a_m > a - \varepsilon.$$

## 2.3 Konvergenz

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Satz von Cauchy: Dass eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert ist gleichbedeutend mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

# 3 Reihen

Notwendig für die Konvergenz: Glieder  $a_n$  bilden eine Nullfolge (nicht hinreichend).

Eine Reihe mit positiven Gliedern ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

## 3.1 Satz von Cauchy

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist genau dann konvergent, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n_0+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

## 3.2 Majorantenkriterium

Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent und  $0 \leq b_k \leq a_k$ , dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent und  $\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

## 3.3 Minorantenkriterium

Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent und  $b_k \geq a_k \geq 0$ , dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergent.

## 3.4 Wurzelkriterium

Existiert ein  $q < 1$ , sodass

$$\forall k : \sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$$

gilt (zumindest für „fast alle“  $k$ ), dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent.

Es genügt zu zeigen:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

### 3.5 Quotientenkriterium

Existiert ein  $0 < q < 1$ , sodass

$$\forall k : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$$

gilt, dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent. Bei

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$$

divergiert die Reihe.

### 3.6 Leibniz-Kriterium

Wenn  $a_k$  eine monoton fallende Nullfolge ist, dann ist die alternierende Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$  konvergent.

### 3.7 Bekannte Reihen

- Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergent} & \alpha > 1 \\ \text{divergent} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

- Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{konvergent} & |q| < 1 \\ \text{divergent} & |q| \geq 1 \end{cases}$$

- „Teleskopreihen“: z.B.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- Exponentialfunktion:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

## 4 Funktionen

### 4.1 Stetigkeit

Eine Funktion  $f$  heißt *stetig in  $x$* , falls für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $(x_n \in D)$ , für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  gilt, auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  gilt, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

## 5 Grenzwertberechnung

### 5.1 Regel von De L'Hospital

Seien  $f$  und  $g$  stetig differenzierbar auf  $[a, b]$  und sei  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls  $g'(x_0) \neq 0$ .

1. Die Regel kann wiederholt werden, falls  $g'(x_0) = 0$ .
2. Die Regel ist auch richtig für  $x_0 = \pm\infty$ .
3. Die Regel ist auch richtig für die unbestimmte Form  $\frac{\infty}{\infty}$ , d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

### 5.2 Umformungen

- „ $\frac{0}{0}$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “: De L'Hospital direkt anwenden
- „ $0 \cdot \infty$ “:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned}$$

- „ $\infty - \infty$ “:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g_1(x) - f_1(x)}{f_1(x) \cdot g_1(x)}$$

mit  $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$  und  $g_1(x) = \frac{1}{g(x)}$ .

- „ $0^0$ “, „ $\infty^0$ “, „ $1^\infty$ “:

Durch Logarithmieren, z.B.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

## 6 Exponentialfunktion

## 6.3 Satz von Euler

### 6.1 Exponentialfunktion

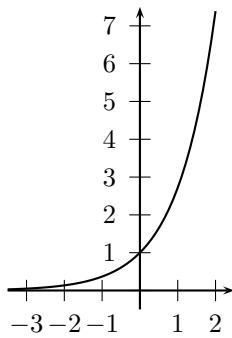
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^x = \exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$



### 6.2 Logarithmus

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

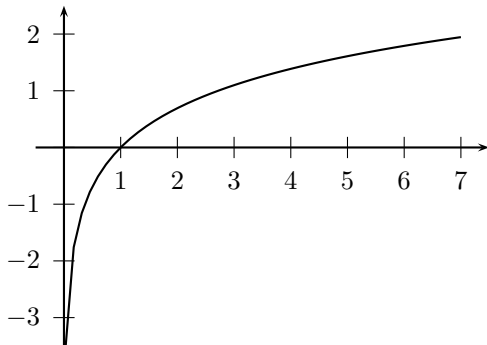
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$



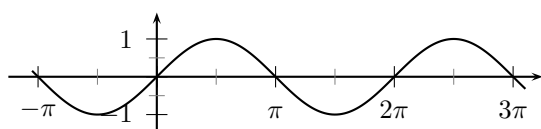
## 7 Trigonometrische Funktionen

### 7.1 Sinus

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \end{aligned}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

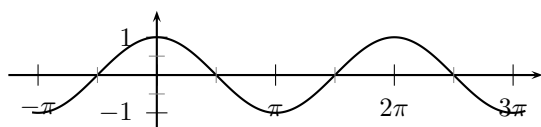


### 7.2 Cosinus

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

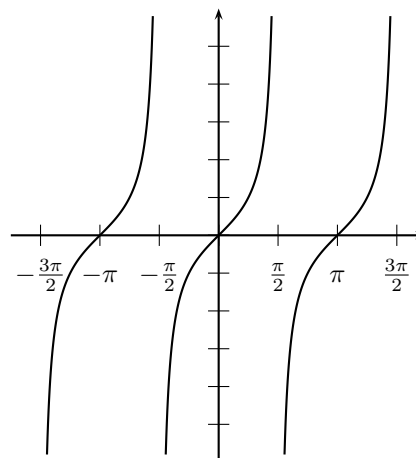


### 7.3 Tangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

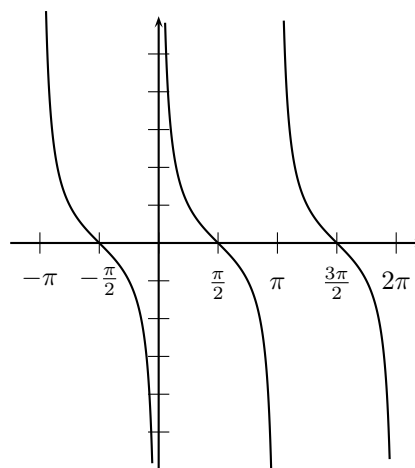


### 7.4 Cotangens

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$



### 7.5 Satz von Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

### 7.6 Additionstheoreme

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

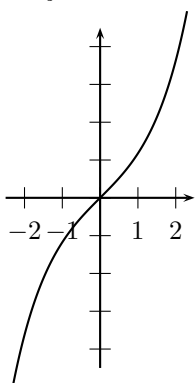
## 8 Hyperbolische Funktionen

### 8.1 Sinus hyperbolicus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$\int \sinh x = \cosh x + C$$

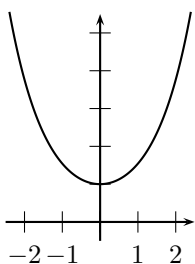


### 8.2 Cosinus hyperbolicus

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

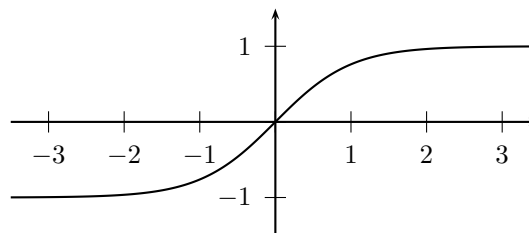


### 8.3 Tangens hyperbolicus

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln \cosh x + C$$

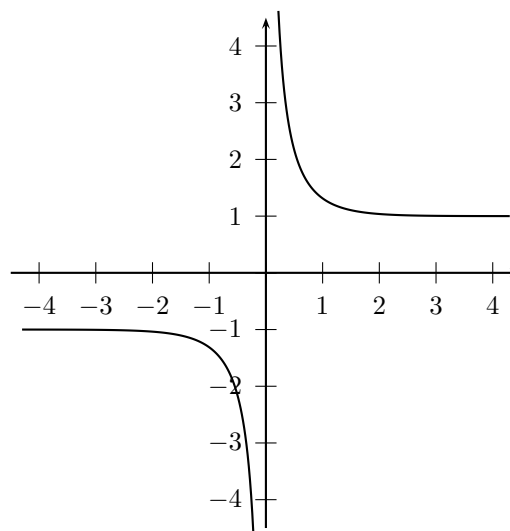


### 8.4 Cotangens hyperbolicus

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\int \coth x \, dx = \ln \sinh x + C$$



### 8.5 Zusammenhang

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

## 9 Zyklometrische Funktionen

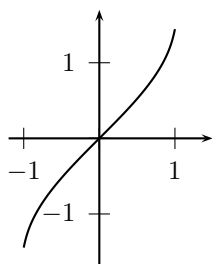
### 9.1 Arcus Sinus

$$D = [-1; 1], W = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin x = \sin^{-1} |_{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}(x)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{mit } x \in (-1, 1)$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$



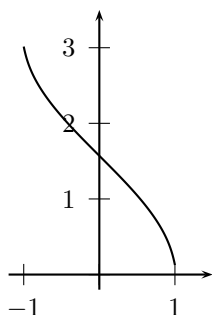
### 9.2 Arcus Cosinus

$$D = [-1; 1], W = [0; \pi]$$

$$\arccos x = \cos^{-1} |_{[0; \pi]}(x)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{mit } x \in (-1, 1)$$

$$\int \arccos x \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$



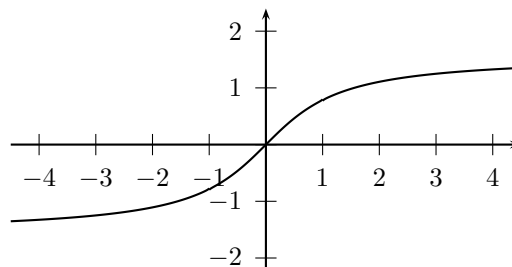
### 9.3 Arcus Tangens

$$D = \mathbb{R}, W = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$$

$$\arctan x = \tan^{-1} |_{(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})}(x)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$



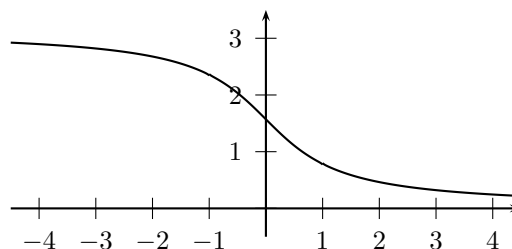
### 9.4 Arcus Cotangens

$$D = \mathbb{R}, W = (0; \pi)$$

$$\operatorname{arccot} x = \cot^{-1} |_{(0; \pi)}(x)$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \cdot \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$



### 9.5 Zusammenhang

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

## 10 Areafunktionen

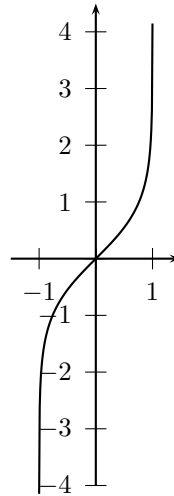
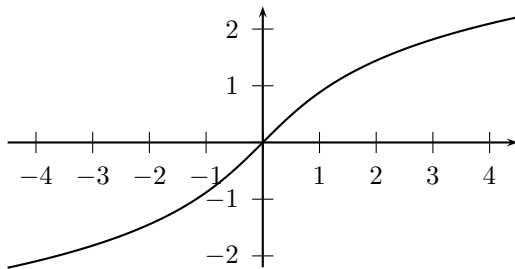
### 10.1 Area Sinus hyperbolicus

$$D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\int \operatorname{arsinh} x \, dx = x \cdot \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + C$$



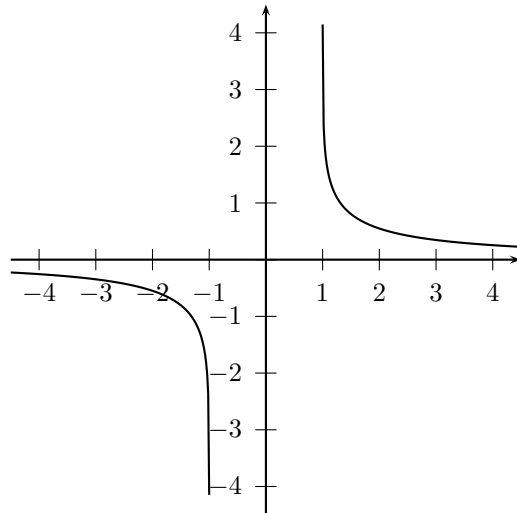
### 10.4 Area Cotangens hyperbolicus

$$D = \mathbb{R} \setminus [-1; 1], W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{arcoth} x = \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\int \operatorname{arcoth} x \, dx = x \cdot \operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)$$



### 10.2 Area Cosinus hyperbolicus

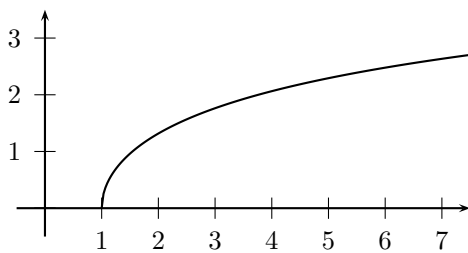
$$D = [1; \infty), W = [0; \infty)$$

$$\operatorname{arcosh} x = \cosh^{-1} |_{[0; \infty)}(x)$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\int \operatorname{arcosh} x \, dx = x \cdot \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1} + C$$



### 10.3 Area Tangens hyperbolicus

$$D = (-1; 1), W = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{artanh} x = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\int \operatorname{artanh} x \, dx = x \cdot \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

## 11 Differenzieren

### 11.1 Differentiationsregeln

1. Linearität:

$$\begin{aligned}(f + g)' &= f' + g' \\ (c \cdot f)' &= c \cdot f'\end{aligned}$$

2. Produktregel:

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

3. Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2} \\ \left(\frac{1}{g}\right)' &= -\frac{g'}{g^2}\end{aligned}$$

4. Kettenregel:

$$(g \circ f)' = \underbrace{(g' \circ f)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot f'$$

5. Umkehrfunktion:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

### 11.2 Satz von Rolle

Sei  $f \in C^1[a, b]$  und sei  $f(a) = f(b)$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x) = 0$ .

### 11.3 Mittelwertsatz

Sei  $f \in C^1[a, b]$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Verallgemeinerung:* Seien  $f, g \in C^1[a, b]$  und  $g'(x) \neq 0$  in  $[a, b]$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in (a, b)$  mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

## 12 Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich
2. Stetigkeit, Differenzierbarkeit
3. Ableitungen
4. Nullstellen
5. Extrema
6. Wendepunkte
7. Monotonie
8. Krümmung:
  - konvex:  $f''(x) \geq 0$
  - konkav:  $f''(x) \leq 0$
9. Asymptoten:
  - $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
  - $d = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx$
10. Periodizität, Symmetrie
11. Graph

## 13 Integrieren

### 13.1 Integrationsregeln

1. Linearität:

$$\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$$

$$\int c \cdot f dx = c \cdot \int f dx$$

2. Partielle Integration:

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$$

3. Substitutionsregel:

$$\int f(y) dy = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

speziell:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du \quad u = ax+b$$

### 13.2 Standardsubstitutionen

1.  $\int R(\sin u, \cos u) du$

Substituiere

$$t = \tan \frac{u}{2}$$

Dann gilt:

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$u = 2 \arctan t$$

$$du = \frac{2}{1+t^2} dt$$

2.  $\int R(x, \sqrt{a^2 \pm x^2}) dx$

Substituiere

$$x = a \cdot \sinh u$$

$$dx = a \cdot \cosh u du$$

bzw.

$$x = a \cdot \cosh u$$

$$dx = a \cdot \sinh u du$$

Damit erhalten wir  $\int R_1(\sinh u, \cosh u) du$  und mit  $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$  bzw.  $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$  kommen wir zu

$$R_2(e^u) du.$$

3.  $\int R(e^u) du$

Substituiere

$$t = e^u.$$

4.  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  kann durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat behandelt werden.

### 13.3 Partialbruchzerlegung

„Typ 0“:  $\int R(x) dx$  mit

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}$$

Vorgangsweise:

- Überprüfe  $\text{grad } P < \text{grad } Q$ . Wenn nicht der Fall: Polynomdivision.
- Nenner in Nullstellen zerlegen:

$$Q(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \dots \cdot (x - z_n)$$

Nullstellen zusammenfassen:

$$Q(x) = (x - z_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - z_r)^{k_r},$$

wobei die  $k_i$  die Vielfachheiten der  $z_i$  sind und  $k_1 + \dots + k_r = n$ .

3. Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x - z_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x - z_1)^{k_1}} + \dots$$

$$+ \frac{A_{k_r}^{(r)}}{(x - z_r)^{k_r}} + \dots + \frac{A_{k_r}^{(r)}}{(x - z_r)^{k_r}}$$

4. Bestimmung der Konstanten:

- Koeffizientenvergleich
- Polmethode

5. Integration:

- Falls reelle Nullstellen:

$$\int \frac{1}{x - a} dx = \ln |x - a|$$

$$\int \frac{1}{(x - a)^2} dx = -\frac{1}{x - a}$$

6. Falls komplexe Nullstellen: Zusammenfassen zugehöriger konjugiert komplexer Funktionen liefert reelles Ergebnis.

**13.4 Bekannte Integrale**

$$\int x^q dx = \frac{x^{q+1}}{q+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int \log_a x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot (x \cdot \ln x - x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arccot} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh} x + C$$