Analysis 2

Jan Pöschko

auf Grundlage der Vorlesung von
Univ.-Prof. Robert Tichy
und
Univ.-Prof. Peter Grabner
im Sommersemester 2006

29. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Taylor-Reihen

Potenzreihe im Entwicklungspunkt x_0:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Konvergenzradius:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ausrechnen der Koeffizienten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Beweis. Reihe gliedweise differenzieren und jeweils x_0 einsetzen; so fällt alles bis auf das jeweilige a_k weg. □

Definition.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt *Taylorreihe*. Für $x_0 = 0$: *MacLaurin-Reihe.*

Taylorpolynom n-ter Ordnung:

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

1.1 Fehlerabschätzung

Direkte Abschätzung:

$$|R_n(x, x_0)| = |f(x) - P_n(x, x_0)|$$

Methode von Lagrange:

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)),$$

wobei $0 < \vartheta < 1$.

Beweis. Betrachte

$$\frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x, x_0) - R_n(x_0, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}}.$$

Wende wiederholt den verallgemeinerten Mittelwertsatz an, bis $R_{n+1}(x, x_0) = f^{(n+1)}(x)$. □

1.2 Binomialreihe

$$f(x) = (1 + x)^\alpha \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

wenn $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$:

$$f(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

(Reihe bricht ab, $R = \infty$)
wenn $\alpha = -1$:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - + \cdots$$

(geometrische Reihe, $R = 1$)

Definition.

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - k + 1)}{k!} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}$$

Taylorentwicklung der Binomialreihe:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1 + x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)} &= \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - k + 1)}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k. \end{aligned}$$

Konvergenzradius $R = 1$, außer für $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Um zu zeigen, dass Reihe wirklich die Funktion darstellt, betrachte $T'(x)$ und $x \cdot T'(x)$. Zeige Hilfsbehauptung $T'(x)(1 + x) = \alpha T(x)$ mittels Koeffizientenvergleich. Daraus folgt

$$\frac{T'(x)}{T(x)} = (\ln T(x))' = \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

was integriert die Behauptung

$$T(x) = (1 + x)^\alpha$$

ergibt. □

1.3 Extremwerte

Sei $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n > 0$ minimal. Ist n gerade, ist x_0 ein lokaler Extremwert. Wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$: Minimum, wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$: Maximum.

Ist n ungerade, handelt es sich nicht um einen lokalen Extremwert, sondern um einen Wendepunkt.

Beweis. Wir betrachten die Taylor-Entwicklung der Funktion. Wenn $f''(x_0) > 0$, ist $f''(\xi) > 0$ in einer ganzen Umgebung von x_0. Somit gilt z.B.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2}_{\geq 0},$$

also ist $f(x_0)$ ein Minimum. □

Definition. Sei f eine reelle Funktion. *Konvex* heißt

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1 + x_2}{2}).$$

Konkav heißt

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\frac{x_1 + x_2}{2}).$$

Eine Punktmenge $E \subseteq \mathbb{R}^*$ heißt *konvex*, falls

$$\forall P_1, P_2 \in E : \text{Strecke } \overline{P_1 P_2} \subseteq E.$$

Sei f zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \text{ konvex,}$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \text{ konkav.}$$

Beweis. Die Definition von *konvex* ist äquivalent zu

$$f(x_1) - f(\tfrac{x_1+x_2}{2} + f(x_2) - f(\tfrac{x_1+x_2}{2}) \geq 0.$$

Wenden wir jeweils den Mittelwertsatz an, ergibt sich

$$-f'(\xi)\tfrac{x_2-x_1}{2} + f'(\eta)\tfrac{x_2-x_1}{2} \geq 0$$

und somit $f'(\xi) > f'(\eta)$. □

2 Bestimmtes Integral

Definition. Seien $I_1, \dots, I_n$ disjunkte Intervalle und sei $\chi_E(x)$ die charakteristische Funktion einer Menge E, d.h.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin E \\ 1 & \text{für } x \notin E \end{cases}$$

(„Indikatorfunktion"). Dann heißt eine Funktion

$$t(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}(x)$$

Treppenfunktion (c_k konstant).

Definition. Sei t eine Treppenfunktion. Dann definiere

$$\int_a^b t(x)\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{n} c_k \left| I_k \right|,$$

wobei $|I_k|$ die Länge der Intervalle bezeichnet.

Definition. Die Näherungssumme

$$\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\Delta x_n = R(f, Z, \xi_n)$$

heißt *Riemann-Summe.*

Spezielle Riemann-Summen:
Obersumme:

$$R^+(f, Z) = \sum_{n=1}^{N} c_n^+ \Delta x_n$$

mit $c_n^+ = \sup_{x\in[x_{n-1},x_n]} f(x)$.
Untersumme:

$$R^-(f, Z) = \sum_{n=1}^{N} c_n^- \Delta x_n$$

mit $c_n^+ = \inf_{x\in[x_{n-1},x_n]} f(x)$.

Definition. Eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion f heißt *Riemann-integrierbar* genau dann, wenn für jede Folge $Z^{(k)}$ von Zerlegungen mit $\lim_{k\to\infty} L(Z^{(k)}) = 0$ gilt,

$$\lim_{k\to\infty} R(f, Z^{(k)}, \xi_n^{(k)})$$

existiert und den gleichen Wert A für beliebige ξ_n hat.

Wir schreiben

$$A = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

(„Riemann-Integral")

Eine Funktion ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn $\int_a^{b+} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^{b-} f(x)\ \mathrm{d}x$.

2.1 Allgemeine Eigenschaften

- $\int_a^b (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int_a^b c \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ („monoton")
- Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$$

- $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$

Beweis. Jede Zerlegung zerfällt in Teilzerlegungen. □

Definition. Sei f eine beschränkte, reellwertige Funktion auf $I = [a, b]$. Dann heißt

$$\omega(I) = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$$

Oszillation von f auf I und

$$\omega(x) = \lim_{\delta\to 0} \omega((x - \delta, x + \delta))$$

Oszillation von f in einem Punkt x.

Bemerkung. f stetig in $x \Leftrightarrow \omega(x) = 0$ (sonst „Sprunghöhe").

Definition. $F(I) = \inf \sum \omega(I_n) |I_n|$.

Bemerkung. f Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow F(I) = 0$.

Satz 2.1. *Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt $\forall x \in I$:*

$$\omega(x) < \varepsilon \Rightarrow F(I) < \varepsilon \left| I \right|.$$

Folgerung: Jede stetige Funktion auf I ist Riemann-integrierbar.

Beweis. Angenommen $F(I) > \varepsilon |I|$. Führe eine Intervallschachtelung durch, sodass $F(I_n) \geq \frac{\varepsilon}{2^n} |I|$. Gleiches gilt für die abgeschlossenen Intervalle $\overline{I_n}$. Es gibt nun sicher ein $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}$. Wähle Intervall J so, dass $x \in J$ mit $\omega(J) < \varepsilon$. Wähle weiters n so, dass $I_n \subset J$. Dann gilt

$$F(\overline{I_n}) \leq \omega(\overline{I_n}) \left|\overline{I_n}\right| \leq \frac{\omega(J)\,|I|}{2^n} < \frac{\varepsilon\,|I|}{2^n} \leq F(\overline{I_n}),$$

ein Widerspruch. □

Definition. Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Nullmenge*, wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine höchstens abzählbare Familie von offenen Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ existiert mit

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

Satz 2.2. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge U ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bildet.*

Beweis. Sei f Riemann-integrierbar auf $[a,b] = I$. Zerteile das Intervall in Teilintervalle $\bigcup_n I_n = I$. Da f Riemann-integrierbar ist, gilt

$$\sum_n \omega(I)\,|I_n| \leq \frac{\varepsilon}{2^{2k}}.$$

Bezeichne mit $\sum'$ die Teilsumme, die über Intervalle erstreckt wird, sodass ein innerer Punkt x von I_n mit $\omega(x) \geq \frac{1}{2^k}$ existiert. Dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2^{2k}} &\geq \sum_n \omega(I_n)\,|I_n| \geq \sum{}' \omega(I_n)\,|I_n| \\ &\geq \frac{1}{2^k} \sum{}' |I_n|,\end{aligned}$$

also folgt

$$\sum{}' |I_n| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Betrachte die Menge der Unstetigkeitspunkte

$$U = \bigcup_k \underbrace{\{x \in I : \omega(x) \geq \frac{1}{2^k}\}}_{F_k}.$$

Also $F_k \subseteq I_{j_1} \cup \cdots \cup I_{j_l}$, wobei die Intervalle in $\sum'$ enthalten sind und Gesamtlänge $< \frac{\varepsilon}{2^k}$ besitzen. Dann wird die Menge von einer endlichen Überdeckung mit

$$\text{Gesamtlänge} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

überdeckt. Also ist U eine Nullmenge.

Sei nun umgekehrt U eine Nullmenge. Setze

$$\sup(f) =: A \quad \text{und} \quad \inf(f) =: B.$$

Die obigen Mengen F_k sind abgeschlossen und kompakt, also gibt es eine endliche Überdeckung mit Intervallen I_n von F_k und Gesamtlänge $< \frac{\varepsilon}{2^k}$. Die Intervalle, die keine Probleme machen, nennen wir J_m. Es gilt also

$$\begin{aligned}F(I) &= \sum_{n=1}^{N} F(I_n) + \sum_{m=1}^{M} F(J_m) \\ &\leq (A-B)\sum_{n=1}^{N} |I_n| + \frac{1}{2^k}\sum_{m=1}^{M} |J_m| \\ &\leq (A-B)\frac{\varepsilon}{2^k} + (b-a)\frac{1}{2^k} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Wähle also k groß genug, damit diese Ungleichung gilt. Dann ist

$$F(I) = 0$$

und somit f Riemann-integrierbar. □

Satz 2.3 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Es gilt (denke an „Integralmittel“) aufgrund der Monotonie des Integrals

$$\begin{aligned}B(b-a) &= \int B\,\mathrm{d}x \leq \int f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int A\,\mathrm{d}x \\ &= A(b-a).\end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. □

Satz 2.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei f stetig auf $[a,b]$ und sei $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ $(a \leq x \leq b)$. Dann gilt für jede Stelle $x_0 \in (a,b)$*

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = f(x_0),$$

d.h. F ist Stammfunktion von f.

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x_0) &\overset{\text{Def.}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\left(\int\limits_a^x f(x)\ \mathrm{d}t - \int\limits_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t\right) \\
&\overset{\text{Addit.}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{MWS}}{=} \lim_{x\to x_0} f(x_0+\vartheta(x-x_0)) \\
&\overset{f\ \text{stetig}}{=} f\left(\lim_{x\to x_0}(x_0+\vartheta(x-x_0))\right) \\
&= f(x_0).
\end{aligned}
$$

□

Es gilt für stetige Funktionen f:

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F_1(b) - F_1(a),$$

wobei F_1 eine beliebige Stammfunktion von f ist.

Definition. E heißt *R-messbar* (auch „Jordan-Maß“), falls E beschränkt und der Rand von E eine Nullmenge ist.

2.2 Uneigentliche Integrale

Beispiel.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|x|\,\Big|_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\ln\varepsilon) \to \infty.
\end{aligned}
$$

2.2.1 Uneigentliche Integrale 1. Art

Wir betrachten unbeschränkte Funktionen und wollen die endliche Additivität benutzen.

1. Für f stetig in $(a,b]$ und
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$
definiere
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

2. Für f stetig in $[a,b)$ und
$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$$
definiere
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

3. Für f stetig in $[a,b]\setminus\{c\}$ und $c\in[a,b]$:
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$
Analog bei endlich vielen Unstetigkeitsstellen

2.2.2 Uneigentliche Integrale 2. Art (unbeschränkte Integrale)

Ein Integral mit einer unendlichen Grenze kann durch einen Grenzübergang berechnet werden; sind beide Grenzen unbeschränkt, kann das Integral aufgespaltet werden:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\ \mathrm{d}x \\
\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x &= \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\ \mathrm{d}x \\
\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Definition (Hauptwert nach Cauchy). Lockerung der Definition:

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

3 Mehrfachintegrale

Definition (Intervall in $\mathbb{R}^s$).

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_s, b_s]$$

Definition (Riemannsche Summe).

$$R(f, Z, P_{nm}) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \underbrace{f(P_{nm})}_{\text{Höhe der Säule}} \cdot \underbrace{I_{nm}}_{\text{Grundfläche}}$$

Definition. Das *Riemann-Integral* von f über dem Intervall I ist definiert durch

$$\iint_I f(\vec{x})\ \mathrm{d}\vec{x} = \lim_{L(Z)\to 0} R(f, Z, P_{nm}),$$

wobei $\mathrm{d}x = (x, y)$ und $\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Definition (Nullmenge in $\mathbb{R}^s$). Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert eine abzählbare Überdeckung von E mit offenen Intervallen I_n (in $\mathbb{R}^s$), sodass

$$\sum_{m=1}^{\infty} m_s(I_n) < \varepsilon \text{ und } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E.$$

Dabei ist m_s das s-dimensionale Maß der Intervalle, definiert durch

$$m_s(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_s - a_s).$$

Bemerkung. Eine endliche Vereinigung von stetig differenzierbaren Flächenstücken bildet eine Nullmenge im $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Betrachte ein Flächenstück: Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert eine Tangentialebene und die Ableitungen sind beschränkt. Wähle entsprechende Boxen, die beliebig klein gemacht werden können. □

Definition. Eine Funktion $z = f(x, y)$ heißt *stückweise stetig*, falls sie stetig mit Ausnahme von glatten Kurvenstücken ist.

$w = f(x, y, z)$ heißt stückweise stetig, falls sie stetig mit Ausnahme glatter Flächenstücke ist.

Satz 3.1 (Fubini — schwache Form). *Sei f stückweise stetig. Dann gilt*

$$\iint_I f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Beweis. Wähle eine rasterförmige Zerlegung und schachtel die Summe entsprechend. □

Definition. Ein beschränkter Bereich E heißt *messbar*, wenn die charakteristische Funktion χ_E Riemann-integrierbar ist, d.h. der Rand von E eine Nullmenge ist.

Das Maß ist definiert als

$$m_s(E) = \int \cdots \int_I \chi_E(\vec{x})\ \mathrm{d}\vec{x}.$$

Satz 3.2. *m_s ist ein endlich additives Maß, d.h.*

$$m_s(E_1 \cup \ldots \cup E_n) = m_s(E_1) + \cdots + m_s(E_n).$$

Beweis. Es gilt für die charakteristische Funktion der Vereinigung

$$\chi_{E_1 \cup \cdots \cup E_n} = \chi_{E_1} + \cdots + \chi_{E_n}.$$

Das Integral darüber ist linear. □

Definition (Bereichsintegral). Sei E messbar.

$$\int \cdots \int_E f(\vec{x})\ \mathrm{d}\vec{x} = \int \cdots \int_I \chi_E(\vec{x}) f(\vec{x})\ \mathrm{d}\vec{x}.$$

Das Bereichsintegral ist wieder R-integrierbar, falls f R-integrierbar ist und E messbar.

3.1 Berechnung von Bereichsintegralen

Normalbereich bzgl. y-Achse:

$$E = \{(x, y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}.$$

Dann gilt

$$\iint_E f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b\ \mathrm{d}x \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y.$$

Normalbereich bzgl. x-Achse:

$$E = \{(x, y) : c \le y \le d, g(y) \le x \le h(y)\}.$$

Dann gilt

$$\iint_E f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d\ \mathrm{d}y \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\ \mathrm{d}x.$$

Normalbereich im $\mathbb{R}^3$ bzgl. z-Achse:

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', g(x, y) \le z \le h(x, y)\},$$

wobei B' die Normalprojektion von B in z-Richtung auf die (x, y)-Ebene ist. Dann gilt

$$V = m_3(B) = \iiint_B \mathrm{d}m_3(\vec{x}) = \\ = \iint_{B'} (h(x, y) - g(x, y))\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(„Prinzip von Cavalieri“)

4 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

4.1 Fläche und Volumen

$$m_2(B) = \iint_B 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$m_3(B) = \iiint_B 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Rotationskörper:
Rotation um x-Achse:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x.$$

Rotation um y-Achse:

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, \mathrm{d}y.$$

4.2 Bogenlänge und Oberfläche von Rotationskörpern

Bogenlänge:

$$s(a,b) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} \, \mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Bogenintegrale sind i.A. unangenehm zu berechnen. Z.B. der Ellipsenumfang führt auf eine nicht elementare Funktion („elliptische Integrale“).

Rotationskörper:

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} \, \mathrm{d}x.$$

4.3 Schwerpunkte

Definition. Schwerpunkt in n-punktigem Massensystem:

$$s = \frac{m_1\vec{x_1} + m_2\vec{x_2} + \cdots + m_n\vec{x_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Bei Dichteverteilung $\varrho(\xi)$:

$$s = \frac{\iint_B \vec{\xi}\varrho(\vec{\xi}) \, \mathrm{d}m_2(\vec{\xi})}{\iint_B \varrho(\vec{\xi}) \, \mathrm{d}m_2(\vec{\xi})}.$$

1. Guldin'sche Regel: Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich der Umfanglinie der rotierenden Fläche multipliziert mit dem Weg, den der Linienschwerpunkt zurücklegt.

2. Guldin'sche Regel: Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich der rotierenden Fläche multipliziert mit dem Weg des Flächenschwerpunkts.

4.4 Integralkriterium und Euler'sche Konstante

Satz 4.1. *Sei $f(t)$ (streng) monoton fallend, stetig und $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Dann ist $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau dann konvergent, wenn $\int_1^\infty f(t) \, \mathrm{d}t$ konvergiert.*

Beweis. Es gilt

$$\int_n^{n+1} f(n) \, \mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} f(n) \, \mathrm{d}t = f(n)$$

und daher

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N f(n) &= \sum_{n=1}^N \int\limits_n^{n+1} f(n) \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^N \left(\int\limits_n^{n+1} f(t) \, \mathrm{d}t + \int\limits_n^{n+1} (f(n) - f(t)) \, \mathrm{d}t \right) \\
&\geq \sum_{n=1}^N \int\limits_n^{n+1} f(t) \, \mathrm{d}t \geq \int\limits_1^{N+1} f(t) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Analog kann die andere Richtung gezeigt werden. □

Beispiel.

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha} \sim \int_1^\infty t^{-\alpha} \, \mathrm{d}t = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^\infty = $$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \ln t\big|_1^\infty = \infty & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

Wie schnell konvergiert diese Reihe?
Betrachte

$$\sum_{n=1}^N \tfrac{1}{n} - \ln N.$$

Diese Folge ist beschränkt nach unten und monoton fallend. Sie hat also einen Grenzwert (die *Euler-Mascheroni-Konstante*), nämlich

$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \tfrac{1}{n} - \ln N \approx 0.577.$$

Beweis. Beschränktheit: Abschätzen mittels

$$\int_1^{N+1} \tfrac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \ln(N+1).$$

Monotonie: Schätze die Differenz aufeinanderfolgender Partialsummen ab:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{n} - \ln N\right) - \left(\sum_{n=1}^{N-1} \tfrac{1}{n} - \ln(N-1)\right)$$
$$= \tfrac{1}{N} + \ln\left(1 - \tfrac{1}{N}\right) \overset{?}{\leq} 0.$$

Zu zeigen bleibt $x + \ln(1-x)$ für $0 < x < 1$, was mittels Mittelwertsatz gezeigt werden kann. □

Bemerkung. Es ist noch unbekannt, ob γ eine rationale Zahl ist. Falls ja, hat der Nenner mind. 240.000 Stellen!

4.5 Numerische Methoden

4.5.1 Rechtecksregel

Zerlege Intervall in Streifen der Breite $\frac{b-a}{N}$ und wähle in jedem Streifen den Mittelpunkt.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Fehler

$$E \leq \frac{1}{24} \frac{(b-a)^3}{N^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(b)|.$$

4.5.2 Kepler'sche Fassregel, Simpson-Formel

Fassregel:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right).$$

Simpson-Formel (auf jeden Streifen Fassregel angewandt):

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \tfrac{b-a}{6N}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) +$$
$$\cdots + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})).$$

Fehler

$$E \leq \tfrac{1}{2880} \cdot \tfrac{(b-a)^5}{N^4} \max_{a \leq x \leq b} \left|f^{IV}(x)\right|.$$

Das bedeutet, dass die Formel exakt ist, wenn die 4. Ableitung 0 ist, z.B. für Polynome 3. Grades.

4.5.3 Newton-Verfahren

Sei $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar auf $[a,b]$. Wollen $f(x) = 0$ näherungsweise lösen.

Wähle den Startwert $x_0 \in [a,b]$. Iteration:

$$x_{n+1} = F(x_n) := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Definition. F ist eine *Kontraktion* genau dann, wenn

$$\forall x, y \in [a,b] : |F(x) - F(y)| \leq q\,|x - y|$$

mit $q < 1$ konstant. („Schrumpfung mit festem Faktor“)

Bemerkung. F ist unter der Voraussetzung, dass f zweimal stetig differenzierbar ist, eine Kontraktion. Laut Banachschem Fixpunktsatz hat jede Kontraktion einen eindeutig bestimmten Fixpunkt.

4.5.4 Sterling'sche Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

4.6 Parameterintegrale

Definition.

$$\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x$$

heißt *Parameterintegral* mit Parameter t. f soll stetig differenzierbar usw. sein.

Satz 4.2. *Wenn $f(x,t)$ stetig differenzierbar ist, gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ \mathrm{d}x.$$

Beweis. Aufgrund des Mittelwertsatzes gilt

$$\int_a^b \tfrac{f(x,t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t}\ \mathrm{d}x = \int_a^b \tfrac{\partial f(x,t+\vartheta\Delta t)}{\partial t}\ \mathrm{d}x.$$

Wendet man darauf noch einmal den Mittelwertsatz an, folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Dieser Satz gilt so nur für feste Grenzen a, b. Sonst: Kettenregel!

Die Regel stimmt auch für uneigentliche Integrale (unendliche Grenzen).

Beispiel. Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t,$$

wobei hier x der Parameter ist.

Für $x \geq 1$ handelt es sich um ein uneigentliches Integral 2. Art, für $x = 0$ divergiert es.

Es gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\ \mathrm{d}t = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(x+1) \overset{\text{part. Int.}}{=} x \cdot \Gamma(x).$$

Ableitung:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\ln t \cdot e^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

4.7 Fourier-Reihen

Definition. $f(x)$ heißt *periodisch* mit Periode $T = 2L$, falls

$$f(x+2L) = f(x)\,\forall x \in \mathbb{R}.$$

Grundfunktionen ($2L$-periodisch): $\cos(\frac{\pi}{2}x)$ und $\sin(\frac{\pi}{2}x)$.

Oberfunktionen: $\cos(\frac{n\pi}{2}x)$ und $\sin(\frac{n\pi}{2}x)$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$).

Prinzip von Fourier: „Jede“ periodische Funktion kann additiv aus Grund- und Oberfunktionen zusammengesetzt werden.

Komplexe Grundfunktion:

$$\cos(\tfrac{\pi}{2}x) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}x) = e^{i\frac{\pi}{2}x}.$$

Komplexe Oberfunktionen:

$$\cos(\tfrac{n\pi}{2}x) + i\sin(\tfrac{n\pi}{2}x) = e^{i\frac{n\pi}{2}x}.$$

Es gilt

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{i\frac{n\pi}{2}x}.$$

Definition. Stetige Funktionen auf $T = [-\pi, \pi]$:

$$\mathcal{C}(T) = \{f \text{ stetig} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}\}.$$

Bemerkung. $\mathcal{C}(T)$ ist Vektorraum. $\mathcal{C}(T)$ ist auch normierter Raum mit dem „quadratischen Mittel“

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ \mathrm{d}x}$$

und dem „Maximalabstand“

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|\,.$$

Ziele:

- Jedes $f \in \mathcal{C}(T)$ kann durch die Funktionen $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\varphi_n(x)$ dargestellt werden, d.h.

  $$\sum_{n=-N}^{N} c_n\varphi_n(x) \to f(x)$$

  für $N \to \infty$ konvergiert.
- Ist $f' \in \mathcal{C}(T)$, dann ist die Konvergenz gleichmäßig, d.h. im Sinne von $\|\cdot\|_\infty$ stetig differenzierbar.

Die Funktionen $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\pi}$ bilden ein Orthonormalsystem, denn

$$< \varphi_n, \varphi_m >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\pi}e^{-im\pi}\ \mathrm{d}x = \delta_{n,m}.$$

Im Reellen gilt außerdem (nach dem Satz von Euler)

$$e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx.$$

Entwicklungskoeffizienten im Reellen:

$$a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x$$

$$b_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x$$

Das führt zur Basisdarstellung

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Satz 4.3 (Bessel-Ungleichung)**.**

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k\varphi_k \right|^2\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ \mathrm{d}x \\
&\quad - 2\sum_{k=-N}^{N} c_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k f(x)\ \mathrm{d}x}_{c_k} + \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \\
&= \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2\,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Wählt man beliebige Entwicklungskoeffizienten γ_k (anstelle der c_k), so erhält man für die mittlere quadratische Abweidung

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f - \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k \varphi_k \right|^2 \mathrm{d}x \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-N}^{N} |\gamma_k - c_k|^2 - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 . \end{aligned}$$

Die Abweichung ist also minimal für $\gamma_k = c_k$.

Definition. Ein Orthonormalsystem heißt *vollständig*, falls die *Parseval-Gleichung*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|_2^2$$

für jede stetige Funktion f gilt, d.h. jede stetige Funktion f ist beliebig genau durch unsere Basisfunktionen im quatratischen Mittel approximierbar.

Satz 4.4 (Approximationssatz von Weierstraß)**.** *Jede stetige Funktion $f(x)$ auf kompaktem Intervall $[a,b]$ kann gleichmäßig durch Polynome approximiert werden, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : \|f - P\|_\infty < \varepsilon.$$

Beweis. $[a,b] \subset [0,1]$ gilt stets mit Lineartransformationen. Daher existieren α, β mit

$$0 < \alpha < a < b < \beta < 1$$

und f ist stetig auf $[\alpha,\beta]$. Setze

$$J_n = \int_0^1 (1-v^2)^n \ \mathrm{d}v.$$

Sei $\delta > 0$ beliebig. Setze

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1-v^2)^n \ \mathrm{d}v.$$

Also gilt

$$0 \le J_n^* < J_n.$$

Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} J_n &> \int_0^1 (1-v)^n \ \mathrm{d}v = \frac{1}{n+1} \\ J_n^* &< \int_\delta^1 (1-\delta^2)^n \ \mathrm{d}v = (1-\delta^2)^n(1-\delta) \\ &< (1-\delta^2)^n, \end{aligned}$$

also

$$\frac{J_n^*}{J_n} < (n+1)\underbrace{(1-\delta^2)}_{=:q<1}{}^{n} = (n+1)q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0.$$

Setze nun

$$P_n(x) = \frac{\int_\alpha^\beta f(u)(1-(u-x)^2)^n \ \mathrm{d}u}{\int_{-1}^1 (1-u^2)^n \mathrm{d}u},$$

das sind Polynome vom Grad $2n$ mit Integralen als Koeffizienten.

Zu zeigen: $P_n(x) \to f$. Betrachte dazu den Zähler

$$\int_\alpha^\beta f(u)(1-(u-x)^2)^n \ \mathrm{d}u.$$

Substituiere $u = v + x$, somit

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha-x}^{\beta-x} \underbrace{f(v+x)(1-v^2)^n \ \mathrm{d}v}_{A} \\ &= \int_{\alpha-x}^{-\delta} A + \int_{-\delta}^{\delta} A + \int_{\delta}^{\beta-x} A = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Sei $M := \sup|f|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |I_1| &\le M \int_{\alpha-x}^{-\delta} (1-v^2)^n \mathrm{d}v < M \cdot J_n^*, \\ |I_3| &< M \cdot J_n^* \quad \text{analog.} \end{aligned}$$

Es verbleibt I_2:

$$\begin{aligned} I_2 = f(x) &\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} (1-v^2)^n \ \mathrm{d}v}_{=2(J_n - J_n^*)} \\ &+ \int_{-\delta}^{\delta} (f(v+x) - f(x))(1-v^2)^n \ \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $\delta(\varepsilon)$, sodass für alle v mit $|v| < \delta(\varepsilon)$ gilt:

$$|f(x+v) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{(glm. Stetigkeit).}$$

Also

$$\begin{aligned} &\int_{-\delta}^{\delta} \left|(f(v+x) - f(x))(1-v^2)^n\right| \ \mathrm{d}v \\ &\le \varepsilon \cdot \int_{-\delta}^{\delta} (1-v^2)^n \ \mathrm{d}v < 2\varepsilon \cdot (J_n - J_n^*). \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also

$$\begin{aligned}&|P_n(x) - f(x)|\\ &\leq \left|\tfrac{2MJ_n^* + 2f(x)(J_n - J_n^*) + 2\varepsilon J_n}{2J_n} - f(x)\right| \to 0.\end{aligned}$$ □

Korollar. *Wir haben eine gleichmäßige Approximation der periodischen Funktion gefunden, d.h. die bestmögliche Approximation (mit Fourierkoeffizienten) konvergiert.*

Satz 4.5. *Wenn f' stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Beweis. Für die Entwicklungskoeffizienten von f' erhalten wir dann mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\alpha_n =& \frac{1}{\pi}\Big[f(x)\cos nx\Big]_{-\pi}^{\pi}\\ &+ \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \;\mathrm{d}x = n \cdot b_n\\ \beta_n =& \ldots = -n \cdot a_n.\end{aligned}$$

Aufgrund der Vollständigkeitsrelation (Parseval-Gleichung) für f' gilt

$$\begin{aligned}\|f'\|_2^2 &= \sum |c_k|^2 = \sum(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\\ &= \sum k^2(a_k^2 + b_k^2).\end{aligned}$$

Wir beweisen nun die gleichmäßige Konvergenz mittels Cauchy-Bedingung, d.h. wir schätzen den Reinreist ab. Es gilt

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=n}^{m}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)\right|\\ &= \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k}(ka_k\cos kx + kb_k\sin kx)\right|\\ &\overset{\text{C-S}}{\leq} \sqrt{\sum\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{\sum k^2(a_k^2 + b_k^2)}\\ &\leq \|f'\|_2 \cdot \underbrace{\sqrt{\sum\frac{1}{k^2}}}_{<\varepsilon_1,\text{ da konv.}} < \varepsilon.\end{aligned}$$ □

Zusammenfassend: Seien f, f' stetig und periodisch mit Periodenintervall $[-L, L]$. Dann gilt

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \tfrac{n\pi}{L}x + b_n \sin\tfrac{n\pi}{L}x)$$

mit

$$\begin{aligned}a_n &= \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\tfrac{n\pi}{L}x \;\mathrm{d}x\\ b_n &= \tfrac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\tfrac{n\pi}{L}x \;\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Bemerkung. Sprungfunktionen sind noch nicht erfasst, da sie nicht stetig sind. Eine Erweiterung ist jedoch möglich (Dirichlet).

5 Kurven in der Ebene

Kartesische Darstellung: $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Problem: Kreis z.B. nicht Kurve im Sinne dieser Definition (keine Funktion).

Parameterdarstellung: $x = x(t)$ und $y = y(t)$. Kartesische Darstellung ist Spezialfall $\vec{x}(t) = \binom{t}{f(t)}$.

Bemerkung. Eine Kurve kann mehrere äquivalente Parametrisierungen besitzen.

Implizite Darstellung einer Kurve: $F(x, y) = C$.

Satz 5.1 (Hauptsatz über implizite Funktionen)**.** *Gegeben sei eine glatte Kurve in implizierter Form $F(x, y) = C$ und sei*

$$\tfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,\ F(x_0, y_0) = C.$$

Dann gibt es eine Umgebung dieses Punktes (x_0, y_0), in der die implizite Gleichung nach $y = f(x)$ aufgelöst werden kann, d.h. $F(x, f(x)) = C$.

Analog: Ist

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0,$$

kann nach $x = f(y)$ aufgelöst werden, d.h. $F(f(y), y) = C$.

(Die Ausnamepunkte sind *singuläre Punkte.*)

Satz 5.2 (Allgemeine Kettenregel)**.** *Sei $w = F(x_1, \dots, x_n)$ die äußere Funktion und seien $x_1 = f_1(t), \dots, x_n = f_n(t)$ die inneren Funktionen. Insgesamt haben wir also die zusammengesetzte Funktion*

$$g(t) = F(f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

Für die Ableitung nach t gilt nun

$$\tfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \tfrac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \tfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} + \dots + \tfrac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \tfrac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}t}.$$

Beweis. Der Beweis des Falles mit 2 Variablen gelingt durch geschickte „Erweiterung“ der Definition der Ableitung mit $F(x, y + \Delta y)$ und passenden Differentialquotienten:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \tfrac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \cdot \tfrac{\Delta x}{\Delta t} \\
&+ \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \tfrac{F(\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y)}{\Delta y} \cdot \tfrac{\Delta y}{\Delta t} \\
&= \tfrac{\partial F}{\partial x} \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \tfrac{\partial F}{\partial y} \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

□

Wenn Auflösung einer impliziten Funktion möglich:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}}_{1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{y'} = 0$$

und somit

$$y' = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Wenn Tangente waagerecht: $y' = 0$. Wenn Tangente senkrecht: $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Definition (Gradientenvektor)*.*

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Gradient steht senkrecht auf Niveaulinien $f(x, y) = C$.

5.1 Zykloide

Abrollen eines Kreises auf einer Geraden. Parameterdarstellung bei Radius a:

$$\begin{aligned}
x &= at - a \sin t \\
y &= a(1 - \cos t)
\end{aligned}$$

Steigung der Tangente:

$$y' = \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Für $t = 0$ (De L'Hospital):

$$y' = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{0} = \infty.$$

5.2 Bogenlänge

$$s(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}\, \dot{x}\, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, \mathrm{d}t.$$

Für Zykloide: $s(0, 2\pi) = 8a$.

5.3 Kurven in Polarkoordinaten

$$r = r(\varphi).$$

Bogenlänge:

$$s(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\, \mathrm{d}\varphi.$$

Beispiel. Logarithmische Spirale: $r = e^{-\varphi}$.

$$s(0, \infty) = \int_0^\infty \sqrt{2e^{-2\varphi}}\, \mathrm{d}y = \sqrt{2}$$

5.4 Flächeninhalt

Satz 5.3 (Leibniz'sche Sektorformel)**.** *Die Fläche einer Kurve (geg. in Polarkoordinaten) zwischen α und β ist*

$$F(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi.$$

Beweis. Betrachte die Fläche eines einzelnen Kreissektors $F_{\mathrm{Sec}} = \frac{r^2\Delta\varphi}{2}$ und bilde die Riemannsche Summe

$$\sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2} r(\xi_n)^2 \Delta\varphi,$$

die gegen das entsprechende Integral konvergiert. □

Bei allgemeinen Parametern $x = x(t), y = y(t)$: $r^2 = x^2 + y^2$, $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ und somit

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{Sec}} &= \frac{1}{2}\int_a^b (x^2+y^2)\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}\ \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

da

$$\tfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{x\dot{y}-\dot{x}y}{(1+\frac{y^2}{x^2})x^2} = \frac{x\dot{y}-\dot{x}y}{x^2+y^2}.$$

Beispiel. Ellipse mit $x = a\cos t$ und $y = b\sin t$:

$$F(T_1,T_2) = \tfrac{ab}{2}(T_2 - T_1).$$

Beispiel. Hyperbel mit $x = a\cosh t$ und $y = b\cosh t$:

$$F_{\mathrm{Sec}} = 2\cdot\frac{1}{2} = \int_0^T \begin{vmatrix} a\cosh t & b\sinh t \\ a\sinh t & b\cosh t \end{vmatrix}\ \mathrm{d}t = abT.$$

Bei Einheitshyperbel: $F_{\mathrm{Sec}} = T$.

5.5 Krümmung ebener Kurven

Die *Krümmung* einer Kurve in einem Punkt ist die Änderung der Richtung in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg.

Definition (Krümmung). Gegeben sei eine Kurve

$$\vec{x} = \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$$

(„natürliche Parametrisierung" bzgl. der Kurvenlänge). Dann ist die *Krümmung*

$$k(s) := \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s},$$

wobei α der Neigungswinkel der Kurventangente ist.

Bei karthesischen Koordinaten $y = y(x)$:

$$k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für $y'' > 0$ ist die Kurve konvex, für $y'' < 0$ konkav.

Bei allgemeinen Koordinaten $\vec{x}(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$:

$$k = \frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Beispiel. Ellipse mit $x = a\cos t$ und $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$:

$$k = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Kreis mit $a = b = R$: $k = \frac{1}{R}$ (konstante positive Krümmung).

Definition. Ein *Scheitelpunkt* einer Kurve ist ein Punkt mit extremaler Krümmung.

Notwendige Bedingung für einen Scheitelpunkt: $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = 0$.

Definition. Der *Krümmungskreis* in einem Kurvenpunkt P ist jener Kreis, der die Kurve in P berührt und Radius $R = \frac{1}{k}$ (also in P gleiche Krümmung) besitzt. Sein Mittelpunkt heißt *Krümmungsmittelpunkt.*

Ein *Scheitelkrümmungskreis* ist ein Krümmungskreis in einem Scheitelpunkt.

Bei einer karthesischen Kurve $y = y(x)$ gilt für den Krümmungsmittelpunkt $M(\xi,\eta)$

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2) \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{aligned}$$

Bei einer Kurve in allgemeiner Parameterdarstellung gilt

$$\xi = x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y}\\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix}},$$
$$\eta = y + \dot{y}\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y}\\ \ddot{x} & \ddot{y}\end{vmatrix}}.$$

Beispiel. Ellipse:

$$\xi(t) = a\cos t - \frac{b\cos t}{ab}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)$$
$$\eta(t) = b\sin t - \frac{a\sin t}{ab}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)$$

Definition. Die Menge aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve ist wieder eine Kurve und heißt *Evolute* der Kurve: $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$.

Die ursprüngliche Kurve wird in diesem Zusammenhang *Envolvente* genannt („Abrollung“).

Die Evolute der Ellipse heißt *Asteroide*.

5.6 Jordan-Kurven

Definition. Eine *Jordan-Kurve* ist eine stetige geschlossene Kurve C in $\mathbb{R}^2$ ohne Selbstüberschneidung, d.h.

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix},\ a \le t \le b,\ \text{stetig}$$

mit

$$\vec{x}(a) = \vec{x}(b) \text{ und } \vec{x}(t_1) \neq \vec{x}(t_2)\ \forall a < t < b.$$

Definition. Eine Menge heißt *zusammenhängend*, falls beliebige Punkte durch eine stetige Kurve innerhalb der Menge verbunden werden können.

Satz 5.4. *Es gibt zwei zusammenhängende disjunkte offene Mengen A, B, sodass*

$$\mathbb{R}^2 \setminus C = A \cup B$$

und $A \cup B$ unzusammenhängend ist.

5.7 Isoperimetrische Ungleichung

Satz 5.5 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Sei F der Flächeninhalt des inneren Bereichs einer Kurve C und $L = \int_a^b \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}t$ ihre Gesamtbogenlänge. Dann gilt*

$$4\pi F \le L^2,$$

mit Gleichheit genau für den Kreis.

Beweis. Die „natürliche“ Parameterdarstellung der Kurve ist

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad \text{mit } 0 \le s \le L.$$

Wähle den neuen Parameter $t = \frac{2\pi s}{L} \Leftrightarrow s = \frac{Lt}{2\pi}$:

$$x = x(t) = x\left(\frac{Lt}{2\pi}\right),$$
$$y = y(t) = y\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)$$

mit $0 \le t \le 2\pi$, das sind also 2π-periodische Funktionen. Entwickle diese in ihre Fourierreihen:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$$
$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(c_n\cos nt + d_n\sin nt)$$

und somit

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(nb_n\cos nt - na_n\sin nt)$$
$$\dot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(nd_n\cos nt - nc_n\sin nt).$$

Es gilt

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ \mathrm{d}t$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2\pi}$$

und daher $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$.

Sei o.B.d.A. C konvex. (Ansonsten nicht konvexen Bereich spiegeln, wodurch der Umfang gleich bleibt, die Fläche aber größer wird.) Es gilt daher nach der Leibniz'schen Sektorformel

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x\dot{y} - y\dot{x})\ \mathrm{d}t.$$

Da C geschlossen ist, gilt

$$\int_0^{2\pi} y\dot{x}\ \mathrm{d}t = \underbrace{x\cdot y\Big|_0^{2\pi}}_{=0,\text{ weil geschlossen}} - \int_0^{2\pi}\dot{y}x\ \mathrm{d}t,$$

und somit

$$F = \int_0^{2\pi} x\dot{y}\ \mathrm{d}t.$$

Es gilt die Vollständigkeitsrelation (Parseval-Gleichung) für die Fourierdarstellung einer Funktion (mit Fourierkoeffizienten A_n, B_n:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2).$$

In unserem Fall:

$$\begin{aligned} f(t) &= \dot{x}(t) \qquad A_n = nb_n \qquad B_n = -na_n, \\ f(t) &= \dot{y}(t) \qquad A_n = nd_n \qquad B_n = -nc_n. \end{aligned}$$

Addition ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2. \end{aligned}$$

Für die Fläche gilt

$$\frac{F}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\dot{y}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n),$$

somit

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi F &= 2\pi^2\sum_{n=0}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2) \\ &- 4\pi^2\sum_{n=0}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) \\ &= 2\pi^2\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}(na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 \\ &+ (n^2-1)(c_n^2+d_n^2)\Bigg) \geq 0. \end{aligned}$$

Gleichheit kann für $n > 1$ nur gelten, wenn $c_n = d_n = 0$ und damit auch $a_n = b_n = 0$. Für $n = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1 \\ b_1 &= -c_1 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos t + b_1 \sin t \\ y(t) &= \frac{b_0}{2} - b_1\cos t + a_1\sin t. \end{aligned}$$

Das ist die Parameterdarstellung des Kreises

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2. \qquad \square$$

5.8 Ergänzung: Raumkurven

Eine Vektorfunktion in $\mathbb{R}^3$ in einer unabhängigen Variable lässt sich schreiben als

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit $a \leq t \leq b$.

Der Tangentenvektor („Geschwindigkeit“) ist

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Bogenlänge:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,\mathrm{d}\tilde{t}.$$

Umkehrfunktion $s = s(t)$ von $t = \psi(s)$ heißt *natürliche Parameterdarstellung.*

Krümmung:

$$k(s) = \left|\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}s^2}\right|.$$

(Vorzeichen würde keinen Sinn ergeben!)

6 Ebene Vektorfelder

Definition. Eine Funktion $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt *Vektorfeld in der Ebene.* (Dabei setzen wir stetig differenzierbar voraus, außer in singulären Punkten.)

$$\vec{v} = \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}.$$

Beispiel. Gradientenfeld

$$\vec{v} = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Hier heißt f *Stammfunktion* (oder *Potenzial*) des Feldes $\vec{v}$.

Definition. Eine *Feldlinie* $y = y(x)$ (kartesische Darstellung) ist eine Kurve, die in jedem Punkt tangential an den Feldvektor verläuft, d.h.

$$y' = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

(Differentialgleichung für die Feldlinie) gilt.

Bemerkung. Die *Äquipotenziallinien* $f(x,y) = c$ (hier ist $|\vec{v}|$ konstant) sind die Niveaulinien der Potenzialfunktion $z = f(x,y)$.

Ein Gradientenfeld steht also senkrecht auf die Äquipotenziallinien.

6.1 Green'scher Satz

Sei B ein kompakter Bereich in $\mathbb{R}^2$, stückweise glatt umrandet und $C = \partial B$ so orientiert, dass der Normalvektor $\vec{n}$ nach außen zeigt. ($\vec{n}$ entsteht aus $\vec{t}$ durch Drehung um 90° im Uhrzeigersinn.)

Die Randkurve sei also

$$C : \vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

mit $a \le t \le b$ und

$$\vec{t} = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Die durch C strömende Materie ist

$$\int_a^b \vec{v}(x(t),y(t)) \cdot \vec{n}_0(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ \mathrm{d}t =: \Phi(C).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \Phi(C) &= \int_a^b P(x(t),y(t))\dot{y}(t)\ \mathrm{d}t \\ &\quad - Q(x(t),y(t))\dot{x}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_C -Q(x,y)\ \mathrm{d}x + P(x,y)\ \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Beispiel. $\vec{v} = -\frac{1}{r^2}\binom{x}{y}$, also Randkurve C ein Kreis mit

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Dann gilt

$$\Phi(C) = -\frac{1}{R^2}\int_C y\ \mathrm{d}x - x\ \mathrm{d}y = \frac{2\pi R^2}{R^2} = 2\pi.$$

Bemerkung. Laut Leibniz'scher Sektorformel gilt für den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}\int_C \begin{vmatrix} x & y \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int_C x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Wenn B keine Löcher enthält, kann man sich den Weg „gegen den Uhrzeigersinn außen herum“ vorstellen. Man spricht von einem *Ringintegral.*

Definition. Die *Quellwirkung* eines Bereichs ist definiert als

$$Q(B) = \iint_B \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{\text{Divergenz } \operatorname{div}\vec{x}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Satz 6.1 (Gauß, Green)**.** *Es gilt*

$$Q(B) = \Phi(\partial B),$$

also

$$\iint_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial B} -Q\ \mathrm{d}x + P\ \mathrm{d}y.$$

Setze $P := -Q$ und $Q := P$, dann folgt die alternative Formulierung

$$\iint_B \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial B} -Q\ \mathrm{d}x + P\ \mathrm{d}y.$$

Neue Interpretation:

$$\begin{aligned} \iint_B \operatorname{div}\vec{v}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \text{Quellwirkung } Q(B) \\ &= \text{in } B \text{ entsprungene Feldlinien.} \end{aligned}$$

$\operatorname{div}\vec{v}$ kann als „Quelldichte“ aufgefasst werden.

Satz 6.2 (Mittelwertsatz für Doppelintegrale)**.** *Sei B ein zusammenhängender kompakter Bereich in $\mathbb{R}^2$ (analog in $\mathbb{R}^s$) und f stetig, $m_2(B) > 0$. Dann existiert ein Punkt $P(\xi, \eta) \in B$, sodass*

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{m_2(B)} \iint_B f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Beweis. Analog zum Mittelwertsatz für Einfachintegrale. □

Es gilt also

$$\exists P(\xi, \eta) \in B : \operatorname{div} \vec{v}(\xi, \eta) = \frac{1}{m_2(B)} \iint_B \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Die rechte Seite entspricht der Dichte der entstehenden Materie (Masse/Fläche).

$\operatorname{div} \vec{x}(x, y)$ ist die *lokale Quelldichte* in (x, y). Ist sie größer als 0, spricht man von einer *Quelle*, wenn größer als 0 von einer *Senke* und sonst von *quellenfrei.*

6.2 Wegunabhängigkeit

Definition. Das Kurvenintegral $\int_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y$ heißt *wegunabhängig*, falls es nur von Anfangs- und Endpunkt, aber nicht vom Kurvenverlauf abhängt, d.h.

$$\oint P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = 0$$

für beliebige geschlossene Kurven.

Das Bereichsintegral $\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ kann für beliebige Bereiche nur 0 sein, falls

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

(*Integrabilitätsbedingung* I.B.). (B darf „keine Löcher enthalten“, d.h. einfach zusammenhängend, d.h. Rand ∂B ist zusammenhängend.)

Bemerkung. Sei B einfach zusammenhängend, $\vec{v}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\text{Wegunabhängigkeit} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ (I.B.).}$$

Definition. Wenn die Integrabilitätsbedingung I.B. erfüllt ist, heißt der Differentialausdruck $P \, \mathrm{d}x + Q \, dy$ *exakt.* (Das heißt das Kurvenintegral ist wegunabhängig.)

Satz 6.3. *Zu einem exakten Differential gibt es eine Stammfunktion $z = f(x, y)$ mit $\operatorname{grad} f = \binom{P}{Q}$, d.h. das Vektorfeld $\vec{v} = \binom{P}{Q}$ ist ein Gradientenfeld.*

(Physikalische Interpretation: $f(x, y)$ ist Potenzial.)

Beweis. Wähle einen „Anfangspunkt“ $A = (x_0, y_0)$ und setze

$$z = f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(\tilde{x}, y_0) \, \mathrm{d}\tilde{x} + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \tilde{y}) \, \mathrm{d}\tilde{y}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial \tilde{x}}}_{= \frac{\partial P}{\partial \tilde{y}}} (x, \tilde{y}) \, \mathrm{d}\tilde{y} \\ &= P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y) \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y).$$ □

Interpretation: Stammfunktion ist potenzielle Energie des Endpunktes (x, y) bezogen auf das Nullniveau (x_0, y_0).

7 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Definition. Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D ein offener Bereich, heißt *stetig* in $P_0(x_0, y_0)$, wenn

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Differenzierbarkeit: partielle Ableitungen betrachten. Wenn Ableitung stetig: *stetig differenzierbar.*

7.1 Richtungsableitung

Definition. Die *Richtungsableitung* („Änderung") von f in Richtung $\vec{r}_0$ ist

$$\tfrac{\partial f}{\partial \vec{r}_0}(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \cdot \vec{r}_0.$$

Bemerkung.

$$\operatorname{grad} f \cdot \vec{r}_0 = \underbrace{|\operatorname{grad} f|}_{\text{vorgeg.}} \cdot \underbrace{|\vec{r}_0|}_{=1} \cdot \cos\angle(\underbrace{\operatorname{grad} f}_{\text{vorgeg.}}, \vec{r}_0),$$

grad f zeigt also in Richtung extremaler Richtungsableitung.

7.2 Linearisierung

Definition. $z = f(\vec{x})$ heißt *differenzierbar* in $\vec{x}_0$, falls eine lineare Funktion $\mathrm{d}f\big|_{\vec{x}_0}$ existiert, sodass

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \mathrm{d}f\big|_{\vec{x}_0}(\vec{h})}{\left|\vec{h}\right|} = 0$$

gilt.

Bemerkung. Die partiellen Ableitungen existieren dann automatisch (Spezialisierung von $\vec{h}$ in Koordinatenrichtungen).

Bemerkung. Das *Differential* $\mathrm{d}f\big|_{\vec{x}_0}$ kann man z.B. definieren als

$$\mathrm{d}f\big|_{\vec{x}_0} : \mathrm{d}z = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

7.2.1 Anwendung 1: Fehlerrechnung

Betrachte die Formel

$$E = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Messen mit gewissem Fehler:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1\text{kg} \pm 1\text{g} &&\Rightarrow \Delta m = 0.001 \\ v_0 &= 1\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \pm 1\% &&\Rightarrow \Delta v = 0.01 \end{aligned}$$

Linearisierung:

$$\begin{aligned} \Delta E \approx \mathrm{d}E &= \tfrac{\partial E}{\partial m}(m_0, v_0)\delta m + \tfrac{\partial E}{\partial v}(m_0, v_0)\Delta v \\ &= \frac{v_0^2}{2}\delta m + m_0 v_0 \Delta v \\ &= 0.0005 + 0.01 = 0.0105 \end{aligned}$$

ist der *absolute Fehler.* Der *relative Fehler* ist also

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\delta E}{\frac{1}{2}} = 0.021.$$

7.2.2 Anwendung 2: Inverse Funktionen

Betrachte Koordinatentransformationen (z.B. Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r\sin\varphi & \varphi &= \arctan\tfrac{y}{x} \end{aligned}$$

Definition. Die *Jakobi-Funktionaldeterminante* ist definiert als

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Satz 7.1 (Hauptsatz über inverse Funktionen)**.** *Die stetig differenzierbare Transformation $x = x(u,v), y = y(u,v)$ ist in einer Umgebung von (u_0, v_0) eindeutig umkehrbar genau dann, wenn die Jakobi-Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ im Punkt (u_0, v_0) von 0 verschieden ist.*

Beispiel. Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r. \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation: Flächenverzerrungsverhältnis.

7.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten (also räumliche Polarkoordinaten) berechnen sich folgendermaßen:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ϱ: Projektion von r auf (x,y)-Ebene

$\varphi = \angle(x^+, \varrho), 0 \leq \varphi < 2\pi$ („geogr. Länge")

$\vartheta = \angle(z^+, r), 0 \leq \vartheta < \pi$ („Poldistanz")

In die andere Richtung:

$$x = \varrho\cos\varphi = r\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$y = \varrho\sin\varphi = r\sin\varphi\sin\vartheta$$
$$z = r\cos\vartheta$$

Koordinatenflächen:

$r = \text{const.}$	Kugel
$\varphi = \text{const.}$	Halbebene
$\vartheta = \text{const.}$	Kegel

Betrachte Jakobi-Funktionaldeterminante:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cdot \sin\vartheta.$$

J ist also genau dann 0, wenn $r = 0$ oder $\vartheta = 0, \pi, 2\pi, \dots$ (z-Achse).

Eine geometrische Interpretation der Jakobi-Funktionaldeterminante wäre das Volumsverzerrungsverhältnis.

Bemerkung. Allgemeiner *Flächenbegriff*: Vektorfunktion

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

für $(u, v) \in B* \subseteq \mathbb{R}^2$.

7.4 Interpretation von Abbildungen

Funktion	Interpretation
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$	kartesische Funktion
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$	Kurve
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$	Kurve
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$	kartesische Funktion
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	ebenes Vektorfeld
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	Fläche
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$	kartesische Funktion
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	räumliches Vektorfeld

7.5 Satz von Taylor im $\mathbb{R}^2$

Sei $z = f(x, y)$. Definiere Hilfsfunktion

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk),$$

kann also für F den Taylor-Satz in einer Variablen t anwenden, $t_0 = 0$:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\vartheta t)}{(n+1)!}t^{n+1}.$$

Es gilt

$$F(0) = f(x_0, y_0)$$
$$F'(0) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k$$

und mittels Kettenregel und Satz von Schwarz

$$F''(0) = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2.$$

Für das Differential 2. Stufe heißt das

$$\mathrm{d}^2 f\big|_{(x_0, y_0)}(h, k) = (h, k)H\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix},$$

wobei

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* ist.

Das führt zum Taylorpolynom der Ordnung n:

$$\frac{1}{n!}F^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f\big|_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{n!}(\tfrac{\partial}{\partial x}h + \tfrac{\partial}{\partial y}k)^n f(x_0, y_0)$$

Allgemein mit Entwicklungspunkt $\vec{x}_0$ und $\vec{h} = (h_1, \dots, h_k)$:

$$z = f(\vec{x})$$
$$\mathrm{d}f\big|_{\vec{x}_0}(\vec{h}) = \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)h_1 + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0)h_k = \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\vec{h}$$
$$\mathrm{d}^2 f\big|_{\vec{x}_0} = \tfrac{1}{2}\vec{h}^t H \vec{h}$$

mit der quadratischen Form

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ f_{x_nx_1} & & & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

(symmetrische Matrix der partiellen Ableitungen).

7.6 Globale und lokale Extrema

Definition. Wir nennen ein $\vec{x}_0 \in D$ ein *globales Maximum*, wenn

$$\forall \vec{x} \in D : f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$$

und *globales Minimum*, wenn

$$\forall \vec{x} \in D : f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0).$$

Satz 7.2 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Sei f stetig auf D, D kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Dann nimmt f auf D ein Minimum und Maximum an.*

Definition. f besitzt im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ein *lokales Minimum*, falls eine δ-Umgebung U von $\vec{x}_0$ existiert mit

$$\forall \vec{x} \in U \cap D : f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0).$$

f besitzt im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ein *lokales Maximum*, falls eine δ-Umgebung U von $\vec{x}_0$ existiert mit

$$\forall \vec{x} \in U \cap D : f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0).$$

Minimum/Maximum *im eigentlichen Sinne*: „$>$“ bzw. „$<$“.

Satz 7.3 (notwendige Bedingung)**.** *Angenommen f besitzt in einem Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ein lokales Extremum und f ist partiell differenzierbar in einer Umgebung von $\vec{x}_0$. Dann folgt*

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \forall i = 1, 2, \ldots .$$

Falls f differenzierbar ist, gilt $\mathrm{d}f\big|_{\vec{x}_0} = 0$.

Beweis. Betrachte einzelne „Koordinatenfunktionen“; die jeweilige Ableitung muss 0 sein, somit $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Falls f differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f\big|_{\vec{x}_0} &= \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)^T \cdot \vec{x}_0 = f_x(\vec{x}_0) + f_y(\vec{x}_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Globale Extrema:

1. Berechne kritische Punkte (Kandidaten für lokale Extrema im Inneren von D)
2. Entscheide, ob Kandidaten Extrema sind oder nicht
3. Untersuche Rand des Definitionsbereichs

7.6.1 Hinreichende Bedingung

Betrachte Hesse-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

(nach Satz von Schwarz symmetrisch).

- H positiv semidefinit ($\forall x : H(x) \geq 0$): lokales Minimum
- H positiv definit ($\forall x \neq 0 : H(x) > 0$): lokales Minimum im eigentlichen Sinne
- H negativ semidefinit ($\forall x : H(x) \leq 0$): lokales Maximum
- H negativ definit ($\forall x \neq 0 : H(x) < 0$): lokales Maximum im eigentlichen Sinne
- H indefinit: kein Extremum, Sattelpunkt

Gleichwertige Bedingungen über Determinante:

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

- $\det H \geq 0$ und $\det A \geq 0$: lokales Minimum
- $\det H > 0$ und $\det A > 0$: lokales Minimum im eigtl. Sinne
- $\det H \geq 0$ und $\det A \leq 0$: lokales Maximum
- $\det H > 0$ und $\det A < 0$: lokales Maximum im eigtl. Sinne
- $\det H < 0$: Sattelpunkt

Allgemein:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Hauptminorenkriterium:

$$D_k = \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1} & \ldots & h_{kk} \end{vmatrix}.$$

- H positiv definit $\Leftrightarrow D_k > 0 \ \forall k$.
- H negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^k D_k > 0 \ \forall k$.

7.7 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Satz 7.4. *Seien f, g stetig differenzierbar, f besitze im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 0$, $g_y(\vec{x}_0) \neq 0$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (*Lagrange-Multiplikator*) mit*

$$f_x(\vec{x}_0) + \lambda g_x(\vec{x}_0) = 0$$
$$f_y(\vec{x}_0) + \lambda g_y(\vec{x}_0) = 0.$$

Praktische Vorgangsweise:

1. $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
2. $F_x = 0, F_y = 0, F_\lambda = 0$
3. Das heißt

$$F_x = f_x + \lambda g_x = 0$$
$$F_y = f_y + \lambda g_y = 0$$
$$F_\lambda = g(x, y) = 0.$$

Allgemein:

1. $F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_m)$
2. Löse $\operatorname{grad} F = \vec{0}$

8 Differenzierbarkeit noch einmal

8.1 Differenzierbarkeit

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Eine Funktion $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^n$ heißt (total) *differenzierbar* in $\vec{x}_0 \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gibt, sodass

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + A(\vec{x} - \vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \vec{r}(\vec{x})$$

mit $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{r}(\vec{x}) = \vec{0}$ gibt.

Lemma. *Wenn A existiert, dann ist A eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien A_1, A_2 zwei Lösungen. Durch Subtrahieren der beiden Definitionsbedingungen erhält man

$$0 = (A_1 - A_2)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot (\vec{r}_1(\vec{x}) - \vec{r}_2(\vec{x})).$$

Setze nun $\vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{y}$, wobei $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann folgt nach Division durch t

$$0 = (A_1 - A_2) \cdot \vec{y} + \operatorname{sgn}(t) \cdot \|\vec{y}\| \cdot (\vec{r}_1(\vec{x}_0 + t\vec{y}) - \vec{r}_2(\vec{x}_0 + t\vec{y})).$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks für $t \to 0$ ist aber

$$0 = (A_1 - A_2)\vec{y},$$

somit $A_1 = A_2$. □

Schreibweise:

$$A = \mathrm{D}\,\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{f}'(x_0) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\vec{x}_0).$$

Wir wissen bereits: Wenn alle partiellen Ableitungen von allen Koordinatenfunktionen von $\vec{f}$ stetig in $\vec{x}_0$ sind, dann ist $\vec{f}$ differenzierbar in $\vec{x}_0$.

Lemma (Kettenregel)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n, \vec{f} : U \to V, \vec{g} : V \to \mathbb{R}^p$. Setze $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$. Sei weiters $\vec{f}$ differenzierbar in $\vec{x}_0$ und $\vec{g}$ differenzierbar in $\vec{y}_0$. Dann ist $\vec{g} \circ \vec{f}$ differenzierbar in $\vec{x}_0$.*

Beweis. Setze Differentiationsdefintion von $\vec{f}$ in die von $\vec{g}$ ein und erhalte so

$$\begin{aligned}\vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) =& \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) + \mathrm{D}\,\vec{g}(\vec{y}_0) \cdot \mathrm{D}\,\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &+ \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|\,\mathrm{D}\,\vec{g}(\vec{y}_0) r_f(\vec{x}) + \left\|\mathrm{D}\,\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot r_f(\vec{x})\right\| \cdot r_g(\vec{f}(\vec{x}))}_{R}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\|R\| \le \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \|D_{\vec{g}}(\vec{y}_0)\| \cdot \|r_f(\vec{x})\| + \left\|\mathrm{D}\,\vec{f}(\vec{x}_0)\right\| \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \left\|r_g(\vec{f}(\vec{x}))\right\| + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \|r_f(\vec{x})\| \cdot \left\|r_g(\vec{f}(\vec{x}))\right\|$$

und somit

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{R}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}.$$

Damit ist $\vec{g} \circ \vec{f}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar und es gilt

$$\mathrm{D}(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}_0) = \mathrm{D}\,\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \cdot \mathrm{D}\,\vec{f}(\vec{x}_0).$$ □

8.2 Implizite Funktionen

Lemma. *Sei $\vec{f} : B(\vec{x}_0, r) \to \mathbb{R}^q$ auf $B(\vec{x}_0, r)$ stetig differenzierbar und gelte $\left\|\vec{f}'(\vec{x})\right\| \leq M$ für alle $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, r)$. Dann gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in B(\vec{x}_0, r)$*

$$\left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\right\| \leq M \left\|\vec{x} - \vec{y}\right\|.$$

Beweis. Es gilt

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y}) = -\int_0^1 \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{f}(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))\ \mathrm{d}t = \int_0^1 -\vec{f}'(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})) \cdot (\vec{y} - \vec{x})\ \mathrm{d}t$$

und somit

$$\left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\right\| \leq \int_0^1 \left\|\vec{f}'(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))\right\| \cdot \left\|\vec{x} - \vec{y}\right\|\ \mathrm{d}t \leq M \cdot \left\|\vec{x} - \vec{y}\right\|.$$ □

Satz 8.1 (Hauptsatz über implizite Funktionen)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^p$ und $V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen, $\vec{F} : U \times V \to \mathbb{R}^q$ auf $U \times V$ stetig differenzierbar und $\vec{x}_0 \in U$, $\vec{y}_0 \in V$ mit*

$$\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0} \quad \textit{und} \quad \tfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \textit{ invertierbar.}$$

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ und eine stetige Funktion $\vec{f} : B(\vec{x}_0, \delta) \to B(\vec{y}_0, \varepsilon)$ mit

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = 0$$

für alle $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$. $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ ist die einzige Lösung der Gleichung $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ in $B(\vec{y}_0, \varepsilon)$.

Beweis. Idee: Formuliere $\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$ als Fixpunktproblem, d.h.

$$\vec{f}(\vec{x}) - B^{-1}\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{f}(\vec{x}),$$

wobei $B := \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ lt. Voraussetzung invertierbar ist.
Definiere die Abbildung A als

$$A : \vec{g} \mapsto \vec{g} - B^{-1}\vec{F}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})).$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes existieren $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, sodass für $\left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\| < \delta$ und $\left\|\vec{y} - \vec{y}_0\right\| < \varepsilon$

$$\left\|A\right\| = \left\|I - B^{-1}\tfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y})\right\| \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left\|B^{-1}\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}_0)\right\| \leq \tfrac{\varepsilon}{4}$$

gilt. Betrachte die Menge

$$M = \{\vec{g} \in \mathcal{C}(B(\vec{x}_0, \delta), \mathbb{R}^q) \mid \vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0 \text{ und } \forall \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) : \left\|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{y}_0\right\| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\}.$$

1. M ist als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes der stetigen Funktionen ebenfalls ein vollständiger metrischer Raum mit der Supremumsnorm

$$\left\vert\!\left\vert\!\left\vert\, \vec{g} \,\right\vert\!\right\vert\!\right\vert := \sup_{\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)} \left\|\vec{g}(\vec{x})\right\|.$$

2. A bildet M in sich ab: Sei $\vec{g} \in M$. Dann gilt

$$\|A\vec{g} - \vec{y}_0\| \leq \underbrace{\|A\vec{g} - A\vec{y}_0\|}_{\leq \frac{1}{2}\|\vec{g}-\vec{y}_0\|} + \underbrace{\|A\vec{y}_0 - \vec{y}_0\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}} \leq \tfrac{\varepsilon}{2},$$

denn

$$\|A\vec{y}_0 - \vec{y}_0\| \leq \left\|B^{-1}F(\vec{x}, \vec{y}_0)\right\| \leq \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Weiters ist

$$(A\vec{g})(\vec{x}_0) = \underbrace{\vec{g}(x_0)}_{\vec{y}_0} - B^{-1}F(\vec{x}_0, \underbrace{\vec{g}(\vec{x}_0)}_{\vec{y}_0}) = \vec{y}_0,$$

somit $A\vec{g} \in M$.

3. A ist eine Kontraktion auf M: Sei $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$ fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}(\vec{y}) &= \vec{y} - B^{-1}\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \left\|\vec{\Phi}'(\vec{y})\right\| &= \left\|I - B^{-1}\tfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y})\right\| \leq \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

für $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ und $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| < \varepsilon$.
Nach dem Lemma gilt daher

$$\left\|\vec{\Phi}(\vec{y}) - \vec{\Phi}(\vec{z})\right\| \leq \tfrac{1}{2}\|\vec{y} - \vec{z}\|,$$

also

$$\|A\vec{g}_1 - A\vec{g}_2\| \leq \tfrac{1}{2}\|\vec{g}_1 - \vec{g}_2\|.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es daher genau einen Fixpunkt $\vec{f} \in M$ mit $A\vec{f} = \vec{f}$, also

$$\begin{aligned} &\vec{f}(\vec{x}) - B^{-1}\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{f}(\vec{x}) \\ &\quad \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}. \end{aligned}$$

□

Satz 8.2 (Differenzierbarkeit impliziter Funktionen)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^p, V \subseteq \mathbb{R}^q$ offen, $\vec{F} : U \times V \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar (eigtl. reicht differenzierbar in $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$) auf $U \times V$, $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$, $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ invertierbar. Sei weiters $\vec{f} : B(\vec{x}_0, \delta) \to B(\vec{y}_0, \varepsilon)$ eine stetige Funktion mit $\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$ für $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$. Dann ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar und es gilt mit $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0)$*

$$\tfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) = -(\tfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0))^{-1} \cdot \tfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0).$$

Beweis. O.B.d.A. seien $\vec{x}_0 = \vec{0}$ und $\vec{y}_0 = \vec{0}$. Setze $B_1 := \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{0}, \vec{0})$ und $B_2 := \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{0}, \vec{0})$. Dass F differenzierbar in $(\vec{0}, \vec{0})$ ist, heißt

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} + B_1\vec{x} + B_2\vec{y} + \|(\vec{x}, \vec{y})\| \cdot \vec{r}(\vec{x}, \vec{y})$$

mit $\lim_{(\vec{x},\vec{y}) \to (\vec{0},\vec{0})} \vec{r}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$.
Wähle die Norm $\|(\vec{x}, \vec{y})\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. Dann gilt

$$\vec{0} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = B_1\vec{x} + B_2\vec{f}(\vec{x}) + \left(\|\vec{x}\| + \left\|\vec{f}(\vec{x})\right\|\right) \cdot \vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$$

und somit

$$\Leftrightarrow \vec{f}(\vec{x}) = -B_2^{-1} B_1 \vec{x} + \left(\|\vec{x}\| + \left\|\vec{f}(\vec{x})\right\| \right) \cdot B_2^{-1} \vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})). \tag{1}$$

Zu zeigen ist also

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} \frac{\|\vec{x}\| + \left\|\vec{f}(\vec{x})\right\|}{\|\vec{x}\|} \cdot B_2^{-1} \vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}.$$

Es gilt

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} B_2^{-1} \vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0},$$

weil $\vec{f}$ stetig ist. Es genügt also zu zeigen, dass $\frac{\|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|}$ und somit auch

$$\frac{\left\| \|\vec{x}\| + \vec{f}(\vec{x}) \right\|}{\|\vec{x}\|}$$

beschränkt bleibt.

Es gibt $\varepsilon_1 < \varepsilon$ und $\delta_1 < \delta$, sodass für $\|\vec{x}\| < \delta_1$ auch $\left\|\vec{f}(\vec{x})\right\| < \varepsilon_1$ und

$$\|\vec{r}(\vec{x}, \vec{y})\| \leq \frac{1}{2\left\|B_2^{-1}\right\|}$$

gilt. Es gilt dann für $\|\vec{x}\| < \delta_1$

$$\left\|\vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))\right\| \leq \frac{1}{2\left\|B_2^{-1}\right\|}.$$

Setzt man das in (1) ein, erhält man

$$\left\|\vec{f}(\vec{x})\right\| \leq \left\|B_2^{-1} B_1\right\| \cdot \|\vec{x}\| + \left(\|\vec{x}\| + \left\|\vec{f}(\vec{x})\right\| \right) \cdot \left\|B_2^{-1}\right\| \cdot \frac{1}{2\left\|B_2^{-1}\right\|}.$$

Daraus folgt

$$\left\|\vec{f}(\vec{x})\right\| \leq \left(\left\|B_2^{-1} B_1\right\| + \tfrac{1}{2} \right) \|\vec{x}\| + \tfrac{1}{2} \left\|\vec{f}(\vec{x})\right\| \leq \left(2\left\|B_2^{-1} B_1\right\| + 1 \right) \|\vec{x}\|$$

und somit

$$\frac{\left\|\vec{f}(\vec{x})\right\|}{\|\vec{x}\|} \leq 2\left\|B_2^{-1} B_1\right\| + 1.$$

□

Bemerkung. Unter der Voraussetzung von Satz 8.1 gibt es eine Umgebung von $\vec{x}_0$, auf der $\vec{f}$ stetig differenzierbar ist.

Beweis. Nach dem Hauptsatz existiert auf einer Umgebung von $\vec{x}_0$ eine stetige Funktion $\vec{f}$ mit

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = 0.$$

$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}$ ist nach Voraussetzung stetig. $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ist invertierbar, und damit ist $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}$ auf einer Umgebung von $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ invertierbar (denke an Formel für Inverse: $\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\right)^{-1}$ ist stetig auf einer Umgebung von $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$).

Nach Satz 8.2 ist $\vec{f}$ in jedem Punkt mit $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$ invertierbar differenzierbar. Daher ist

$$\vec{f}'(x) = -\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)^{-1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$$

stetig und $\vec{f}$ ist daher auf einer Umgebung von $\vec{x}_0$ stetig differenzierbar. □

Satz 8.3 (Lagrange). *Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^q$ und seien $f : U \to \mathbb{R}$ und $\vec{N} : u \to \mathbb{R}^p$ mit $p < q$ stetig differenzierbare Funktionen. Wenn in $\vec{x}_0 \in U$ eine Extremstelle von f unter den Nebenbedingungen $\vec{N}(\vec{x}) = \vec{0}$ vorliegt, dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\tfrac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}_0) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \tfrac{\partial \vec{N}_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 \quad \textit{für } i = 1, \ldots, q.$$

Satz 8.4 (Inverse Funktionen). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar. Für $\vec{x}_0 \in U$ sei $\vec{f}'(\vec{x}_0)$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung V von $\vec{x}_0$ und eine offene Umgebung W von $\vec{f}(\vec{x}_0)$, sodass die Funktion $\vec{f} : V \to W$ bijektiv ist.*

Die Umkehrabbildung $\vec{g} : W \to V$ ist differenzierbar und es gilt

$$\vec{g}'(\vec{f}(\vec{x}_0)) = (\vec{f}'(\vec{x}_0))^{-1}.$$

8.3 Mehrdimensionale Polarkoordinaten

$$\vec{x} = r \cdot \vec{x}_d(\varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{d-2}).$$

Betrachte die Jacobi-Matrix

$$J_d = \left(\tfrac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}, \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta_1}, \ldots, \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta_{d-2}}, \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial r}\right).$$

Es gilt

$$|J_d| = r^{d-1} \sin \vartheta_1 (\sin \vartheta_2)^2 (\sin \vartheta_3)^3 \cdots (\sin \vartheta_{d-2})^{d-2}.$$

8.4 Kalkül der alternierenden Differentialformen

8.4.1 Definitionen

Bisher hatten wir zwei Typen von Integralen:

- Bereichsintegrale der Form

$$\int \cdots \int_B f(x_1, \ldots, x_d) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d,$$

- Kurven- und Oberflächenintegrale der Form

$$\int_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y + R \, \mathrm{d}z \text{ bzw. } \iint_B P \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q \, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Idee: Betrachte alles hinter dem Integral als Integranden, also

$$\omega = f(x_1, \ldots, x_d) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_d.$$

Definition (Dach-Produkt). Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Addition und skalarer Multiplikation. Definiere

$$\bigwedge^k V := \operatorname{span}\{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_k \mid \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V\}$$

mit den Regeln

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \text{ (somit } \vec{v} \wedge \vec{v} = 0)$$
$$\lambda \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \wedge \lambda \vec{v}_2 = \lambda(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$$

Bemerkung. Eine Basis von $\bigwedge^k V$ ist

$$\{\vec{e}_H = \vec{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_k} \mid H = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}, |H| = k\}.$$

Die Summe aller $\bigwedge^k V$ ergibt den Vektorraum

$$\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k V$$

mit einem Produkt $\wedge$ (eine *Graßmann-Algebra*), wobei

$$\dim \bigwedge V = 2^n.$$

Bemerkung. $\mathrm{d}f$ ist eine lineare Abbildung, also $\mathrm{d}f \in (\mathbb{R}^n)^*$ (Menge der *Kovektoren*).

Beispiel. $P\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + Q\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \bigwedge^2 (\mathbb{R}^n)^*$

Definition. Bezeichne mit $F^k(U)$ die k-Formen auf U. Setze $\deg \omega := k$ für $\omega \in F^k(U)$.

Definition (Äußere Ableitung). Für die *äußere Ableitung* $\mathrm{d} : F^k(U) \to F^{k+1}(U)$ gilt

1. $\mathrm{d}(\omega + \eta) = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\eta$,
2. $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \mathrm{d}\eta$,
3. $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$,
4. $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \mathrm{d}x_n$.

Für

$$\omega = \sum_H a_H\ \mathrm{d}x_H \in F^k(U)$$

gilt

$$\mathrm{d}\omega = \sum_H \mathrm{d}(a_H \mathrm{d}x_H) = \sum_H (\mathrm{d}a_H \wedge \mathrm{d}x_H + (-1)^0 a_H \mathrm{d}(\mathrm{d}x_H)) = \sum_H \mathrm{d}a_H \wedge \mathrm{d}x_H.$$

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $W = \mathbb{R}^n$, $\Phi : W \to U$, $g : U \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(U)$. Definiere $\Phi^* : F^k(U) \to F^k(W)$ durch

$$\Phi^* g = g \circ \Phi.$$

Lemma. *Es gilt*

$$\mathrm{d}(\Phi^* f) = \Phi^*(\mathrm{d}f).$$

Beweis. Sei

$$\Phi : (u_1, \ldots, u_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n).$$

Es gilt aufgrund der Kettenregel

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Phi^* f) = \mathrm{d}(f \circ \Phi) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1} \mathrm{d}u_1 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \mathrm{d}u_m \right)}_{\mathrm{d}x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \underbrace{\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_1} \mathrm{d}u_1 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \mathrm{d}u_m \right)}_{\mathrm{d}x_n} \\ &= \Phi^*(\mathrm{d}f).\end{aligned}$$

□

Definition. Das Integral einer k-Form ω über einer Mannigfaltigkeit $M = \Phi(W)$, $W \subseteq \mathbb{R}^k$, ist definiert als

$$\int_{\Phi(W)=M} \omega := \int_W \Phi^* \omega.$$

(„Ziehen alles nach W runter und dort kennen wir uns aus.“)

8.4.2 Satz von Stokes

Satz 8.5 (Stokes)**.** *Sei M eine $(k+1)$-dimensionale orientierte Teilmannigfaltigkeit von $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Rand ∂M von M sei eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von U. Für $\omega \in F^k(U)$ gilt dann*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis. Sei o.B.d.A. W ein $(k+1)$-Simplex mit $M = \Phi(W)$ (ansonsten aufteilen), d.h.

$$W = \{(u_1, \ldots, u_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid u_1, \ldots, u_{k+1} \geq 0, u_1 + \cdots + u_{k+1} \leq 1\}.$$

Sei außerdem $\eta = \Phi^*\omega$ o.B.d.A. ein Monom (ansonsten aufsummieren), d.h.

$$\Phi^*\omega = \eta = A \,\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_k.$$

Dann gilt für die Ableitung aufgrund des Lemmas

$$\begin{aligned}\Phi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\Phi^*\omega) = \mathrm{d}\eta &= \left(\tfrac{\partial A}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1 + \cdots + \tfrac{\partial A}{\partial u_{k+1}}\mathrm{d}u_{k+1}\right) \,\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_k \\ &= (-1)^k \tfrac{\partial A}{\partial u_{k+1}} \,\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_{k+1}.\end{aligned}$$

Somit ist das Integral darüber

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{d}\omega = \int_W \Phi^*(\mathrm{d}\omega) &= (-1)^k \int_W \tfrac{\partial A}{\partial u_{k+1}} \,\mathrm{d}u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_{k+1} \\ &= (-1)^k \int\limits_{u_i \geq 0, \sum_{i=1}^k u_i \leq 1} \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_k \left(\int\limits_0^{1-\sum_{i=1}^k u_i} \tfrac{\partial A}{\partial u_{k+1}} \, du_{k+1} \right) \\ &= (-1)^k \int\limits_{u_i \geq 0, \sum_{i=1}^k u_i \leq 1} \left(A(u_1, \ldots, u_k, 1-\textstyle\sum_{i=1}^k u_i) - A(u_1, \ldots, u_k, 0)\right) \,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_k.\end{aligned} \tag{2}$$

Das ist also ein Integral über einem k-Simplex.

Betrachte nun den Rand ∂W. Seine Eckpunkte seien

$$\begin{aligned} R_0 &= 0 \\ R_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ R_{k+1} &= (0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\partial W = (R_1, \ldots, R_{k+1}) + (-1)^{k+1}(R_0, R_1, \ldots, R_{k+1}) + \text{andere Flächen, wo } \eta = 0,$$

da dort eines der $u_1, \ldots, u_k$ konstant ist. Das heißt

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial W} \Phi^*\omega = (-1)^{k+1} \int\limits_{(R_0, \ldots, R_k)} \eta + \int\limits_{(R_1, \ldots, R_{k+1})} \eta.$$

Das erste Integral ist das Integral von η über einem k-Simplex, also genau der zweite Term in (2). Das zweite Integral wird „in die Grundebene projiziert“:

$$\begin{aligned}\int\limits_{(R_1, \ldots, R_{k+1})} \eta &= \int\limits_{(R_1, \ldots, R_k, R_0)} A(u_1, \ldots, u_k, 1-\textstyle\sum_{i=1}^k u_i) \,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_k \\ &= (-1)^k \int\limits_{(R_0, R_1, \ldots, R_k)} A(u_1, \ldots, u_k, 1-\textstyle\sum_{i=1}^k u_i) \,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_k.\end{aligned}$$

Das entspricht genau dem ersten Term in (2). □

Korollar (Integralsatz von Gauß, Green)**.** *Sei* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompakt mit abschnittsweise glattem Rand* (S)*. Der Rand sei orientiert durch ein äußeres Normalen-Einheitsfeld* $\vec{n}$*. Sei ferner* $\vec{F}$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von* V*. Dann gilt*

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \, \mathrm{d}V = \oint_{(S)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

mit der Abkürzung $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n} \, \mathrm{d}S$*.*

Definition (Rotation)*.* Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfeldes F ist wieder ein dreidimensionales Vektorfeld und ist definiert als

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Interpretiert man das Feld als Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort an, wie schnell und um welche Achse ein mitschwimmender Körper rotieren würde.

Korollar. *Sei* M *eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$ *und* ∂M *ihr Rand (z.B. eine Fläche und die sie umschließende Kurve). Dann gilt für ein Vektorfeld* F

$$\iint_M (\operatorname{rot} F) \mathrm{d}A = \oint_{\partial M} F \mathrm{d}r.$$

Literatur

[1] Vorlesungsmitschrift

[2] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Band 2. B. G. Teubner, Stuttgard, 1981.

[3] W. Walter: Analysis 2. Springer, Berlin, 1995.

[4] H. Flanders: Differential Forms with Applications to the Physical Sciences. Dover, New York, 1963.

[5] S. H. Weintraub: Differential Forms. A Complement to Vector Calculus. Academic Press, San Diego, 1997.

[6] H. Holmann, H. Rummler: Alternierende Differentialformen. B.I.-Wissenschaftsverlag, Zürich, 1981.