

# **Analysis 2**

Jan Pöschko

auf Grundlage der Vorlesung von  
Univ.-Prof. Robert Tichy  
und  
Univ.-Prof. Peter Grabner  
im Sommersemester 2006

29. Januar 2007

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Taylor-Reihen</b>	<b>3</b>
1.1 Fehlerabschätzung . . . . .	3
1.2 Binomialreihe . . . . .	3
1.3 Extremwerte . . . . .	4
<b>2 Bestimmtes Integral</b>	<b>5</b>
2.1 Allgemeine Eigenschaften . . . . .	5
2.2 Uneigentliche Integrale . . . . .	7
<b>3 Mehrfachintegrale</b>	<b>8</b>
3.1 Berechnung von Bereichsintegralen . . . . .	8
<b>4 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung</b>	<b>9</b>
4.1 Fläche und Volumen . . . . .	9
4.2 Bogenlänge und Oberfläche von Rotationskörpern . . . . .	9
4.3 Schwerpunkte . . . . .	9
4.4 Integralkriterium und Euler'sche Konstante . . . . .	9
4.5 Numerische Methoden . . . . .	10
4.6 Parameterintegrale . . . . .	10
4.7 Fourier-Reihen . . . . .	11
<b>5 Kurven in der Ebene</b>	<b>14</b>
5.1 Zykloide . . . . .	14
5.2 Bogenlänge . . . . .	14
5.3 Kurven in Polarkoordinaten . . . . .	14
5.4 Flächeninhalt . . . . .	15
5.5 Krümmung ebener Kurven . . . . .	15
5.6 Jordan-Kurven . . . . .	16
5.7 Isoperimetrische Ungleichung . . . . .	16
5.8 Ergänzung: Raumkurven . . . . .	17
<b>6 Ebene Vektorfelder</b>	<b>18</b>
6.1 Green'scher Satz . . . . .	18
6.2 Wegunabhängigkeit . . . . .	19
<b>7 Differentialrechnung im <math>\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3</math></b>	<b>20</b>
7.1 Richtungsableitung . . . . .	20
7.2 Linearisierung . . . . .	20
7.3 Kugelkoordinaten . . . . .	20
7.4 Interpretation von Abbildungen . . . . .	21
7.5 Satz von Taylor im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	21
7.6 Globale und lokale Extrema . . . . .	22
7.7 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	23
<b>8 Differenzierbarkeit noch einmal</b>	<b>24</b>
8.1 Differenzierbarkeit . . . . .	24
8.2 Implizite Funktionen . . . . .	25
8.3 Mehrdimensionale Polarkoordinaten . . . . .	28
8.4 Kalkül der alternierenden Differentialformen . . . . .	28

# 1 Taylor-Reihen

Potenzreihe im Entwicklungspunkt  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Konvergenzradius:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ausrechnen der Koeffizienten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

*Beweis.* Reihe gliedweise differenzieren und jeweils  $x_0$  einsetzen; so fällt alles bis auf das jeweilige  $a_k$  weg.  $\square$

*Definition.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

heißt *Taylorreihe*. Für  $x_0 = 0$ : *MacLaurin-Reihe*.

Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung:

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

## 1.1 Fehlerabschätzung

Direkte Abschätzung:

$$|R_n(x, x_0)| = |f(x) - P_n(x, x_0)|$$

Methode von Lagrange:

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)),$$

wobei  $0 < \vartheta < 1$ .

*Beweis.* Betrachte

$$\frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x, x_0) - R_n(x_0, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}}$$

Wende wiederholt den verallgemeinerten Mittelwertsatz an, bis  $R_{n+1}(x, x_0) = f^{(n+1)}(x)$ .  $\square$

## 1.2 Binomialreihe

$$f(x) = (1+x)^\alpha \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest}$$

wenn  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ :

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

(Reihe bricht ab,  $R = \infty$ )

wenn  $\alpha = -1$ :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - + \dots$$

(geometrische Reihe,  $R = 1$ )

*Definition.*

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}$$

Taylorentwicklung der Binomialreihe:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k. \end{aligned}$$

Konvergenzradius  $R = 1$ , außer für  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* Um zu zeigen, dass Reihe wirklich die Funktion darstellt, betrachte  $T'(x)$  und  $x \cdot T'(x)$ . Zeige Hilfsbehauptung  $T'(x)(1+x) = \alpha T(x)$  mittels Koeffizientenvergleich. Daraus folgt

$$\frac{T'(x)}{T(x)} = (\ln T(x))' = \frac{\alpha}{1+x},$$

was integriert die Behauptung

$$T(x) = (1+x)^\alpha$$

ergibt.  $\square$

### 1.3 Extremwerte

Sei  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ,  $n > 0$  minimal. Ist  $n$  gerade, ist  $x_0$  ein lokaler Extremwert. Wenn  $f^{(n)}(x_0) > 0$ : Minimum, wenn  $f^{(n)}(x_0) < 0$ : Maximum.

Ist  $n$  ungerade, handelt es sich nicht um einen lokalen Extremwert, sondern um einen Wendepunkt.

*Beweis.* Wir betrachten die Taylor-Entwicklung der Funktion. Wenn  $f''(x_0) > 0$ , ist  $f''(\xi) > 0$  in einer ganzen Umgebung von  $x_0$ . Somit gilt z.B.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2}_{\geq 0},$$

also ist  $f(x_0)$  ein Minimum. □

*Definition.* Sei  $f$  eine reelle Funktion. *Konvex* heißt

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

*Konkav* heißt

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Eine Punktmenge  $E \subseteq \mathbb{R}^*$  heißt *konvex*, falls

$$\forall P_1, P_2 \in E : \text{Strecke } \overline{P_1 P_2} \subseteq E.$$

Sei  $f$  zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \text{konvex},$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \text{konkav}.$$

*Beweis.* Die Definition von *konvex* ist äquivalent zu

$$f(x_1) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq 0.$$

Wenden wir jeweils den Mittelwertsatz an, ergibt sich

$$-f'(\xi) \frac{x_2-x_1}{2} + f'(\eta) \frac{x_2-x_1}{2} \geq 0$$

und somit  $f'(\xi) > f'(\eta)$ . □

## 2 Bestimmtes Integral

*Definition.* Seien  $I_1, \dots, I_n$  disjunkte Intervalle und sei  $\chi_E(x)$  die charakteristische Funktion einer Menge  $E$ , d.h.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin E \\ 1 & \text{für } x \in E \end{cases}$$

(„Indikatorfunktion“). Dann heißt eine Funktion

$$t(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}(x)$$

*Treppenfunktion* ( $c_k$  konstant).

*Definition.* Sei  $t$  eine Treppenfunktion. Dann definiere

$$\int_a^b t(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k |I_k|,$$

wobei  $|I_k|$  die Länge der Intervalle bezeichnet.

*Definition.* Die Näherungssumme

$$\sum_{n=1}^N f(\xi_n) \Delta x_n = R(f, Z, \xi_n)$$

heißt *Riemann-Summe*.

Spezielle Riemann-Summen:

Obersumme:

$$R^+(f, Z) = \sum_{n=1}^N c_n^+ \Delta x_n$$

mit  $c_n^+ = \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$ .

Untersumme:

$$R^-(f, Z) = \sum_{n=1}^N c_n^- \Delta x_n$$

mit  $c_n^- = \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$ .

*Definition.* Eine auf  $[a, b]$  beschränkte Funktion  $f$  heißt *Riemann-integrierbar* genau dann, wenn für jede Folge  $Z^{(k)}$  von Zerlegungen mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(Z^{(k)}) = 0$  gilt,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(f, Z^{(k)}, \xi_n^{(k)})$$

existiert und den gleichen Wert  $A$  für beliebige  $\xi_n$  hat.

Wir schreiben

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

(„Riemann-Integral“)

Eine Funktion ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn  $\int_a^{b+} f(x) dx = \int_a^{b-} f(x) dx$ .

## 2.1 Allgemeine Eigenschaften

- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$
- $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$  („monoton“)
- Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

*Beweis.* Jede Zerlegung zerfällt in Teilzerlegungen.  $\square$

*Definition.* Sei  $f$  eine beschränkte, reellwertige Funktion auf  $I = [a, b]$ . Dann heißt

$$\omega(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$$

*Oszillation* von  $f$  auf  $I$  und

$$\omega(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega((x - \delta, x + \delta))$$

Oszillation von  $f$  in einem Punkt  $x$ .

*Bemerkung.*  $f$  stetig in  $x \Leftrightarrow \omega(x) = 0$  (sonst „Sprunghöhe“).

*Definition.*  $F(I) = \inf \sum \omega(I_n) |I_n|$ .

*Bemerkung.*  $f$  Riemann-integrierbar  $\Leftrightarrow F(I) = 0$ .

**Satz 2.1.** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gilt  $\forall x \in I$ :

$$\omega(x) < \varepsilon \Rightarrow F(I) < \varepsilon |I|.$$

*Folgerung:* Jede stetige Funktion auf  $I$  ist Riemann-integrierbar.

*Beweis.* Angenommen  $F(I) > \varepsilon |I|$ . Führe eine Intervallschachtelung durch, sodass  $F(I_n) \geq \frac{\varepsilon}{2^n} |I|$ . Gleiches gilt für die abgeschlossenen Intervalle  $\overline{I_n}$ . Es gibt nun sicher ein  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}$ . Wähle Intervall  $J$  so, dass  $x \in J$  mit  $\omega(J) < \varepsilon$ . Wähle weiters  $n$  so, dass  $I_n \subset J$ . Dann gilt

$$F(\overline{I_n}) \leq \omega(\overline{I_n}) |\overline{I_n}| \leq \frac{\omega(J) |I|}{2^n} < \frac{\varepsilon |I|}{2^n} \leq F(\overline{I_n}),$$

ein Widerspruch.  $\square$

*Definition.* Eine Menge  $E \subseteq \mathbb{R}$  heißt *Nullmenge*, wenn für beliebiges  $\varepsilon > 0$  eine höchstens abzählbare Familie von offenen Intervallen  $I_1, I_2, \dots$  existiert mit

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon.$$

**Satz 2.2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann ist  $f$  genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge  $U$  ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bildet.

*Beweis.* Sei  $f$  Riemann-integrierbar auf  $[a, b] = I$ . Zerteile das Intervall in Teilintervalle  $\bigcup_n I_n = I$ . Da  $f$  Riemann-integrierbar ist, gilt

$$\sum_n \omega(I) |I_n| \leq \frac{\varepsilon}{2^{2k}}.$$

Bezeichne mit  $\sum'$  die Teilsumme, die über Intervalle erstreckt wird, sodass ein innerer Punkt  $x$  von  $I_n$  mit  $\omega(x) \geq \frac{1}{2^k}$  existiert. Dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2^{2k}} &\geq \sum_n \omega(I_n) |I_n| \geq \sum' \omega(I_n) |I_n| \\ &\geq \frac{1}{2^k} \sum' |I_n|, \end{aligned}$$

also folgt

$$\sum' |I_n| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Betrachte die Menge der Unstetigkeitspunkte

$$U = \bigcup_k \underbrace{\{x \in I : \omega(x) \geq \frac{1}{2^k}\}}_{F_k}.$$

Also  $F_k \subseteq I_{j_1} \cup \dots \cup I_{j_l}$ , wobei die Intervalle in  $\sum'$  enthalten sind und Gesamtlänge  $< \frac{\varepsilon}{2^k}$  besitzen. Dann wird die Menge von einer endlichen Überdeckung mit

$$\text{Gesamtlänge} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

überdeckt. Also ist  $U$  eine Nullmenge.

Sei nun umgekehrt  $U$  eine Nullmenge. Setze

$$\sup(f) =: A \quad \text{und} \quad \inf(f) =: B.$$

Die obigen Mengen  $F_k$  sind abgeschlossen und kompakt, also gibt es eine endliche Überdeckung mit

Intervallen  $I_n$  von  $F_k$  und Gesamtlänge  $< \frac{\varepsilon}{2^k}$ . Die Intervalle, die keine Probleme machen, nennen wir  $J_m$ . Es gilt also

$$\begin{aligned} F(I) &= \sum_{n=1}^N F(I_n) + \sum_{m=1}^M F(J_m) \\ &\leq (A - B) \sum_{n=1}^N |I_n| + \frac{1}{2^k} \sum_{m=1}^M |J_m| \\ &\leq (A - B) \frac{\varepsilon}{2^k} + (b - a) \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Wähle also  $k$  groß genug, damit diese Ungleichung gilt. Dann ist

$$F(I) = 0$$

und somit  $f$  Riemann-integrierbar. □

**Satz 2.3** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei  $f$  eine stetige Funktion auf  $[a, b]$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

*Beweis.* Es gilt (denke an „Integralmittel“) aufgrund der Monotonie des Integrals

$$\begin{aligned} B(b - a) &= \int B \, dx \leq \int f(x) \, dx \leq \int A \, dx \\ &= A(b - a). \end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. □

**Satz 2.4** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei  $f$  stetig auf  $[a, b]$  und sei  $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$  ( $a \leq x \leq b$ ). Dann gilt für jede Stelle  $x_0 \in (a, b)$

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = f(x_0),$$

d.h.  $F$  ist Stammfunktion von  $f$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x_0) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left( \int_a^x f(x) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) \\ &\stackrel{\text{Addit.}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt \\ &\stackrel{\text{MWS}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \\ &\stackrel{f \text{ stetig}}{=} f \left( \lim_{x \rightarrow x_0} (x_0 + \vartheta(x - x_0)) \right) \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Es gilt für stetige Funktionen  $f$ :

$$\int_a^b f(t) dt = F_1(b) - F_1(a),$$

wobei  $F_1$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$  ist.

*Definition.*  $E$  heißt *R-messbar* (auch „Jordan-Maß“), falls  $E$  beschränkt und der Rand von  $E$  eine Nullmenge ist.

## 2.2 Uneigentliche Integrale

*Beispiel.*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\ln \varepsilon) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

### 2.2.1 Uneigentliche Integrale 1. Art

Wir betrachten unbeschränkte Funktionen und wollen die endliche Additivität benutzen.

1. Für  $f$  stetig in  $(a, b]$  und

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$

definiere

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

2. Für  $f$  stetig in  $[a, b)$  und

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$$

definiere

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

3. Für  $f$  stetig in  $[a, b] \setminus \{c\}$  und  $c \in [a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Analog bei endlich vielen Unstetigkeitsstellen

### 2.2.2 Uneigentliche Integrale 2. Art (unbeschränkte Integrale)

Ein Integral mit einer unendlichen Grenze kann durch einen Grenzübergang berechnet werden; sind beide Grenzen unbeschränkt, kann das Integral aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x) dx \\ \int_a^{\infty} f(x) dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_a^B f(x) dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx \end{aligned}$$

*Definition* (Hauptwert nach Cauchy). Lockerung der Definition:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

### 3 Mehrfachintegrale

*Definition* (Intervall in  $\mathbb{R}^s$ ).

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_s, b_s]$$

*Definition* (Riemannsche Summe).

$$R(f, Z, P_{nm}) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \underbrace{f(P_{nm})}_{\text{Höhe der Säule}} \cdot \underbrace{I_{nm}}_{\text{Grundfläche}}$$

*Definition.* Das *Riemann-Integral* von  $f$  über dem Intervall  $I$  ist definiert durch

$$\iint_I f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \lim_{L(Z) \rightarrow 0} R(f, Z, P_{nm}),$$

wobei  $dx = (x, y)$  und  $d\vec{x} = dx dy$ .

*Definition* (Nullmenge in  $\mathbb{R}^s$ ). Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  existiert eine abzählbare Überdeckung von  $E$  mit offenen Intervallen  $I_n$  (in  $\mathbb{R}^s$ ), sodass

$$\sum_{m=1}^{\infty} m_s(I_n) < \varepsilon \text{ und } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E.$$

Dabei ist  $m_s$  das  $s$ -dimensionale Maß der Intervalle, definiert durch

$$m_s(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_s - a_s).$$

*Bemerkung.* Eine endliche Vereinigung von stetig differenzierbaren Flächenstücken bildet eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^3$ .

*Beweis.* Betrachte ein Flächenstück: Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert eine Tangentialebene und die Ableitungen sind beschränkt. Wähle entsprechende Boxen, die beliebig klein gemacht werden können.  $\square$

*Definition.* Eine Funktion  $z = f(x, y)$  heißt *stückweise stetig*, falls sie stetig mit Ausnahme von glatten Kurvenstücken ist.

$w = f(x, y, z)$  heißt *stückweise stetig*, falls sie stetig mit Ausnahme glatter Flächenstücke ist.

**Satz 3.1** (Fubini — schwache Form). *Sei  $f$  stückweise stetig. Dann gilt*

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy.$$

*Beweis.* Wähle eine rasterförmige Zerlegung und schachtel die Summe entsprechend.  $\square$

*Definition.* Ein beschränkter Bereich  $E$  heißt *messbar*, wenn die charakteristische Funktion  $\chi_E$  Riemann-integrierbar ist, d.h. der Rand von  $E$  eine Nullmenge ist.

Das Maß ist definiert als

$$m_s(E) = \int \dots \int_I \chi_E(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

**Satz 3.2.**  $m_s$  ist ein endlich additives Maß, d.h.

$$m_s(E_1 \cup \dots \cup E_n) = m_s(E_1) + \dots + m_s(E_n).$$

*Beweis.* Es gilt für die charakteristische Funktion der Vereinigung

$$\chi_{E_1 \cup \dots \cup E_n} = \chi_{E_1} + \dots + \chi_{E_n}.$$

Das Integral darüber ist linear.  $\square$

*Definition* (Bereichsintegral). Sei  $E$  messbar.

$$\int \dots \int_E f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int \dots \int_I \chi_E(\vec{x}) f(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Das Bereichsintegral ist wieder R-integrierbar, falls  $f$  R-integrierbar ist und  $E$  messbar.

#### 3.1 Berechnung von Bereichsintegralen

Normalbereich bzgl.  $y$ -Achse:

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Dann gilt

$$\iint_E f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy.$$

Normalbereich bzgl.  $x$ -Achse:

$$E = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Dann gilt

$$\iint_E f(x, y) \, dx dy = \int_c^d dy \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx.$$

Normalbereich im  $\mathbb{R}^3$  bzgl.  $z$ -Achse:

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

wobei  $B'$  die Normalprojektion von  $B$  in  $z$ -Richtung auf die  $(x, y)$ -Ebene ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} V = m_3(B) &= \iiint_B dm_3(\vec{x}) = \\ &= \iint_{B'} (h(x, y) - g(x, y)) \, dx dy. \end{aligned}$$

(„Prinzip von Cavalieri“)

## 4 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung

### 4.1 Fläche und Volumen

$$m_2(B) = \iint_B 1 \, dx dy$$

$$m_3(B) = \iiint_B 1 \, dx dy dz$$

Rotationskörper:

Rotation um  $x$ -Achse:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

Rotation um  $y$ -Achse:

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy.$$

### 4.2 Bogenlänge und Oberfläche von Rotationskörpern

Bogenlänge:

$$s(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

*Bemerkung.* Bogenintegrale sind i.A. unangenehm zu berechnen. Z.B. der Ellipsenumfang führt auf eine nicht elementare Funktion („elliptische Integrale“).

Rotationskörper:

$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

### 4.3 Schwerpunkte

*Definition.* Schwerpunkt in  $n$ -punktigem Massensystem:

$$s = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2 + \dots + m_n \vec{x}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Bei Dichteverteilung  $\rho(\xi)$ :

$$s = \frac{\iint_B \xi \rho(\xi) \, dm_2(\xi)}{\iint_B \rho(\xi) \, dm_2(\xi)}.$$

1. Guldin'sche Regel: Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich der Umfanglinie der rotierenden Fläche multipliziert mit dem Weg, den der Linienschwerpunkt zurücklegt.

2. Guldin'sche Regel: Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich der rotierenden Fläche multipliziert mit dem Weg des Flächenschwerpunkts.

### 4.4 Integralkriterium und Euler'sche Konstante

**Satz 4.1.** Sei  $f(t)$  (streng) monoton fallend, stetig und  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ . Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  genau dann konvergent, wenn  $\int_1^{\infty} f(t) \, dt$  konvergiert.

*Beweis.* Es gilt

$$\int_n^{n+1} f(t) \, dt = \int_{n-1}^n f(t) \, dt = f(n)$$

und daher

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N f(n) &= \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f(t) \, dt \\ &= \sum_{n=1}^N \left( \int_n^{n+1} f(t) \, dt + \int_n^{n+1} (f(n) - f(t)) \, dt \right) \\ &\geq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f(t) \, dt \geq \int_1^{N+1} f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Analog kann die andere Richtung gezeigt werden.  $\square$

*Beispiel.*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} &\sim \int_1^{\infty} t^{-\alpha} \, dt = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^{\infty} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ \ln t \Big|_1^{\infty} = \infty & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Wie schnell konvergiert diese Reihe?

Betrachte

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N.$$

Diese Folge ist beschränkt nach unten und monoton fallend. Sie hat also einen Grenzwert (die *Euler-Mascheroni-Konstante*), nämlich

$$\gamma := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \approx 0.577.$$

*Beweis.* Beschränktheit: Abschätzen mittels

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{t} dt = \ln(N+1).$$

Monotonie: Schätze die Differenz aufeinanderfolgender Partialsummen ab:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) - \left( \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \ln(N-1) \right) \\ = \frac{1}{N} + \ln \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \stackrel{?}{\leq} 0. \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt  $x + \ln(1-x)$  für  $0 < x < 1$ , was mittels Mittelwertsatz gezeigt werden kann.  $\square$

*Bemerkung.* Es ist noch unbekannt, ob  $\gamma$  eine rationale Zahl ist. Falls ja, hat der Nenner mind. 240.000 Stellen!

## 4.5 Numerische Methoden

### 4.5.1 Rechtecksregel

Zerlege Intervall in Streifen der Breite  $\frac{b-a}{N}$  und wähle in jedem Streifen den Mittelpunkt.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Fehler

$$E \leq \frac{1}{24} \frac{(b-a)^3}{N^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

### 4.5.2 Kepler'sche Fassregel, Simpson-Formel

Fassregel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right).$$

Simpson-Formel (auf jeden Streifen Fassregel angewandt):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6N} \left( f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \right. \\ \left. \dots + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N}) \right). \end{aligned}$$

Fehler

$$E \leq \frac{1}{2880} \cdot \frac{(b-a)^5}{N^4} \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|.$$

Das bedeutet, dass die Formel exakt ist, wenn die 4. Ableitung 0 ist, z.B. für Polynome 3. Grades.

### 4.5.3 Newton-Verfahren

Sei  $f(x)$  zweimal stetig differenzierbar auf  $[a, b]$ . Wollen  $f(x) = 0$  näherungsweise lösen.

Wähle den Startwert  $x_0 \in [a, b]$ . Iteration:

$$x_{n+1} = F(x_n) := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

*Definition.*  $F$  ist eine Kontraktion genau dann, wenn

$$\forall x, y \in [a, b] : |F(x) - F(y)| \leq q |x - y|$$

mit  $q < 1$  konstant. („Schrumpfung mit festem Faktor“)

*Bemerkung.*  $F$  ist unter der Voraussetzung, dass  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist, eine Kontraktion. Laut Banachschem Fixpunktsatz hat jede Kontraktion einen eindeutig bestimmten Fixpunkt.

### 4.5.4 Sterling'sche Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

## 4.6 Parameterintegrale

*Definition.*

$$\int_a^b f(x, t) dx$$

heißt *Parameterintegral* mit Parameter  $t$ .  $f$  soll stetig differenzierbar usw. sein.

**Satz 4.2.** Wenn  $f(x, t)$  stetig differenzierbar ist, gilt

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

*Beweis.* Aufgrund des Mittelwertsatzes gilt

$$\int_a^b \frac{f(x, t+\Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t+\vartheta\Delta t)}{\partial t} dx.$$

Wendet man darauf noch einmal den Mittelwertsatz an, folgt die Behauptung.  $\square$

*Bemerkung.* Dieser Satz gilt so nur für feste Grenzen  $a, b$ . Sonst: Kettenregel!

Die Regel stimmt auch für uneigentliche Integrale (unendliche Grenzen).

*Beispiel.* Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

wobei hier  $x$  der Parameter ist.

Für  $x \geq 1$  handelt es sich um ein uneigentliches Integral 2. Art, für  $x = 0$  divergiert es.

Es gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(x+1) \stackrel{\text{part. Int.}}{=} x \cdot \Gamma(x).$$

Ableitung:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt.$$

### 4.7 Fourier-Reihen

*Definition.*  $f(x)$  heißt *periodisch* mit Periode  $T = 2L$ , falls

$$f(x+2L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Grundfunktionen ( $2L$ -periodisch):  $\cos(\frac{\pi}{2}x)$  und  $\sin(\frac{\pi}{2}x)$ .

Oberfunktionen:  $\cos(\frac{n\pi}{2}x)$  und  $\sin(\frac{n\pi}{2}x)$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

Prinzip von Fourier: „Jede“ periodische Funktion kann additiv aus Grund- und Oberfunktionen zusammengesetzt werden.

Komplexe Grundfunktion:

$$\cos(\frac{\pi}{2}x) + i \sin(\frac{\pi}{2}x) = e^{i\frac{\pi}{2}x}.$$

Komplexe Oberfunktionen:

$$\cos(\frac{n\pi}{2}x) + i \sin(\frac{n\pi}{2}x) = e^{i\frac{n\pi}{2}x}.$$

Es gilt

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{i\frac{n\pi}{2}x}.$$

*Definition.* Stetige Funktionen auf  $T = [-\pi, \pi]$ :

$$\mathcal{C}(T) = \{f \text{ stetig} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

*Bemerkung.*  $\mathcal{C}(T)$  ist Vektorraum.  $\mathcal{C}(T)$  ist auch normierter Raum mit dem „quadratischen Mittel“

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

und dem „Maximalabstand“

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

Ziele:

- Jedes  $f \in \mathcal{C}(T)$  kann durch die Funktionen  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi_n(x)$  dargestellt werden, d.h.

$$\sum_{n=-N}^N c_n \varphi_n(x) \rightarrow f(x)$$

für  $N \rightarrow \infty$  konvergiert.

- Ist  $f' \in \mathcal{C}(T)$ , dann ist die Konvergenz gleichmäßig, d.h. im Sinne von  $\|\cdot\|_\infty$  stetig differenzierbar.

Die Funktionen  $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\pi x}$  bilden ein Orthonormalsystem, denn

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\pi x} e^{-im\pi x} dx = \delta_{n,m}.$$

Im Reellen gilt außerdem (nach dem Satz von Euler)

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx.$$

Entwicklungskoeffizienten im Reellen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Das führt zur Basisdarstellung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

**Satz 4.3** (Bessel-Ungleichung).

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^N c_k \varphi_k \right|^2 dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &\quad - 2 \sum_{k=-N}^N c_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k f(x) dx}_{c_k} + \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\ &= \|f(x)\|_2^2 - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2. \end{aligned} \quad \square$$

*Bemerkung.* Wählt man beliebige Entwicklungskoeffizienten  $\gamma_k$  (anstelle der  $c_k$ ), so erhält man für die mittlere quadratische Abweichung

$$M = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f - \sum_{k=-N}^N \gamma_k \varphi_k \right|^2 dx$$

$$= \|f\|_2^2 + \sum_{k=-N}^N |\gamma_k - c_k|^2 - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Die Abweichung ist also minimal für  $\gamma_k = c_k$ .

*Definition.* Ein Orthonormalsystem heißt *vollständig*, falls die Parseval-Gleichung

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|_2^2$$

für jede stetige Funktion  $f$  gilt, d.h. jede stetige Funktion  $f$  ist beliebig genau durch unsere Basisfunktionen im quadratischen Mittel approximierbar.

**Satz 4.4** (Approximationssatz von Weierstraß). *Jede stetige Funktion  $f(x)$  auf kompaktem Intervall  $[a, b]$  kann gleichmäßig durch Polynome approximiert werden, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k : \|f - P\|_{\infty} < \varepsilon.$$

*Beweis.*  $[a, b] \subset [0, 1]$  gilt stets mit Lineartransformationen. Daher existieren  $\alpha, \beta$  mit

$$0 < \alpha < a < b < \beta < 1$$

und  $f$  ist stetig auf  $[\alpha, \beta]$ . Setze

$$J_n = \int_0^1 (1 - v^2)^n dv.$$

Sei  $\delta > 0$  beliebig. Setze

$$J_n^* = \int_{\delta}^1 (1 - v^2)^n dv.$$

Also gilt

$$0 \leq J_n^* < J_n.$$

Es gilt außerdem

$$J_n > \int_0^1 (1 - v)^n dv = \frac{1}{n+1}$$

$$J_n^* < \int_{\delta}^1 (1 - \delta^2)^n dv = (1 - \delta^2)^n (1 - \delta)$$

$$< (1 - \delta^2)^n,$$

also

$$\frac{J_n^*}{J_n} < (n+1) \underbrace{(1 - \delta^2)^n}_{=: q < 1} = (n+1)q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0.$$

Setze nun

$$P_n(x) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(u)(1 - (u-x)^2)^n du}{\int_{-1}^1 (1 - u^2)^n du},$$

das sind Polynome vom Grad  $2n$  mit Integralen als Koeffizienten.

Zu zeigen:  $P_n(x) \rightarrow f$ . Betrachte dazu den Zähler

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u)(1 - (u-x)^2)^n du.$$

Substituiere  $u = v + x$ , somit

$$\int_{\alpha-x}^{\beta-x} \underbrace{f(v+x)(1 - v^2)^n}_{A} dv$$

$$= \int_{\alpha-x}^{-\delta} A + \int_{-\delta}^{\delta} A + \int_{\delta}^{\beta-x} A = I_1 + I_2 + I_3.$$

Sei  $M := \sup |f|$ . Dann gilt

$$|I_1| \leq M \int_{\alpha-x}^{-\delta} (1 - v^2)^n dv < M \cdot J_n^*,$$

$$|I_3| < M \cdot J_n^* \quad \text{analog.}$$

Es verbleibt  $I_2$ :

$$I_2 = f(x) \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} (1 - v^2)^n dv}_{=2(J_n - J_n^*)}$$

$$+ \int_{-\delta}^{\delta} (f(v+x) - f(x))(1 - v^2)^n dv.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann gibt es ein  $\delta(\varepsilon)$ , sodass für alle  $v$  mit  $|v| < \delta(\varepsilon)$  gilt:

$$|f(x+v) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{glm. Stetigkeit}).$$

Also

$$\int_{-\delta}^{\delta} |(f(v+x) - f(x))(1 - v^2)^n| dv$$

$$\leq \varepsilon \cdot \int_{-\delta}^{\delta} (1 - v^2)^n dv < 2\varepsilon \cdot (J_n - J_n^*).$$

Zusammenfassend gilt also

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \left| \frac{2MJ_n^* + 2f(x)(J_n - J_n^*) + 2\varepsilon J_n}{2J_n} - f(x) \right| \rightarrow 0. \quad \square$$

**Korollar.** Wir haben eine gleichmäßige Approximation der periodischen Funktion gefunden, d.h. die bestmögliche Approximation (mit Fourierkoeffizienten) konvergiert.

**Satz 4.5.** Wenn  $f'$  stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

*Beweis.* Für die Entwicklungskoeffizienten von  $f'$  erhalten wir dann mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \left[ f(x) \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = n \cdot b_n \\ \beta_n &= \dots = -n \cdot a_n. \end{aligned}$$

Aufgrund der Vollständigkeitsrelation (Parseval-Gleichung) für  $f'$  gilt

$$\begin{aligned} \|f'\|_2^2 &= \sum |c_k|^2 = \sum (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \\ &= \sum k^2 (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Wir beweisen nun die gleichmäßige Konvergenz mittels Cauchy-Bedingung, d.h. wir schätzen den Rest ab. Es gilt

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=n}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \\ &= \left| \sum_{k=n}^m \frac{1}{k} (ka_k \cos kx + kb_k \sin kx) \right| \\ &\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \sqrt{\sum \frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{\sum k^2 (a_k^2 + b_k^2)} \\ &\leq \|f'\|_2 \cdot \underbrace{\sqrt{\sum \frac{1}{k^2}}}_{< \varepsilon_1, \text{ da konv.}} < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Zusammenfassend: Seien  $f, f'$  stetig und periodisch mit Periodenintervall  $[-L, L]$ . Dann gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x)$$

mit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Sprungfunktionen sind noch nicht erfasst, da sie nicht stetig sind. Eine Erweiterung ist jedoch möglich (Dirichlet).

## 5 Kurven in der Ebene

Kartesische Darstellung:  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Problem: Kreis z.B. nicht Kurve im Sinne dieser Definition (keine Funktion).

Parameterdarstellung:  $x = x(t)$  und  $y = y(t)$ . Kartesische Darstellung ist Spezialfall  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

*Bemerkung.* Eine Kurve kann mehrere äquivalente Parametrisierungen besitzen.

Implizite Darstellung einer Kurve:  $F(x, y) = C$ .

**Satz 5.1** (Hauptsatz über implizite Funktionen). Gegeben sei eine glatte Kurve in implizierter Form  $F(x, y) = C$  und sei

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0, F(x_0, y_0) = C.$$

Dann gibt es eine Umgebung dieses Punktes  $(x_0, y_0)$ , in der die implizite Gleichung nach  $y = f(x)$  aufgelöst werden kann, d.h.  $F(x, f(x)) = C$ .

Analog: Ist

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0,$$

kann nach  $x = f(y)$  aufgelöst werden, d.h.  $F(f(y), y) = C$ .

(Die Ausnahmepunkte sind *singuläre Punkte*.)

**Satz 5.2** (Allgemeine Kettenregel). Sei  $w = F(x_1, \dots, x_n)$  die äußere Funktion und seien  $x_1 = f_1(t), \dots, x_n = f_n(t)$  die inneren Funktionen. Insgesamt haben wir also die zusammengesetzte Funktion

$$g(t) = F(f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

Für die Ableitung nach  $t$  gilt nun

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{df_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{df_n}{dt}.$$

*Beweis.* Der Beweis des Falles mit 2 Variablen gelingt durch geschickte „Erweiterung“ der Definition der Ableitung mit  $F(x, y + \Delta y)$  und passenden Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad \square \end{aligned}$$

Wenn Auflösung einer impliziten Funktion möglich:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{y'} = 0$$

und somit

$$y' = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Wenn Tangente waagrecht:  $y' = 0$ . Wenn Tangente senkrecht:  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ .

*Definition* (Gradientenvektor).

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$$

*Bemerkung.* Gradient steht senkrecht auf Niveaulinien  $f(x, y) = C$ .

### 5.1 Zykloide

Abrollen eines Kreises auf einer Geraden. Parameterdarstellung bei Radius  $a$ :

$$x = at - a \sin t$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

Steigung der Tangente:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Für  $t = 0$  (De L'Hospital):

$$y' = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{0} = \infty.$$

### 5.2 Bogenlänge

$$s(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2} \dot{x} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Für Zykloide:  $s(0, 2\pi) = 8a$ .

### 5.3 Kurven in Polarkoordinaten

$$r = r(\varphi).$$

Bogenlänge:

$$s(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi.$$

*Beispiel.* Logarithmische Spirale:  $r = e^{-\varphi}$ .

$$s(0, \infty) = \int_0^{\infty} \sqrt{2e^{-2\varphi}} d\varphi = \sqrt{2}$$

### 5.4 Flächeninhalt

**Satz 5.3** (Leibniz'sche Sektorformel). Die Fläche einer Kurve (geg. in Polarkoordinaten) zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  ist

$$F(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) \, d\varphi.$$

*Beweis.* Betrachte die Fläche eines einzelnen Kreis-sektors  $F_{\text{Sec}} = \frac{r^2 \Delta\varphi}{2}$  und bilde die Riemannsche Summe

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2} r(\xi_n)^2 \Delta\varphi,$$

die gegen das entsprechende Integral konvergiert.  $\square$

Bei allgemeinen Parametern  $x = x(t), y = y(t)$ :  $r^2 = x^2 + y^2, \varphi = \arctan \frac{y}{x}$  und somit

$$\begin{aligned} F_{\text{Sec}} &= \frac{1}{2} \int_a^b (x^2 + y^2) \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} \, dt, \end{aligned}$$

da

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{(1 + \frac{y^2}{x^2})x^2} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2 + y^2}.$$

*Beispiel.* Ellipse mit  $x = a \cos t$  und  $y = b \sin t$ :

$$F(T_1, T_2) = \frac{ab}{2}(T_2 - T_1).$$

*Beispiel.* Hyperbel mit  $x = a \cosh t$  und  $y = b \sinh t$ :

$$F_{\text{Sec}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \int_0^T \begin{vmatrix} a \cosh t & b \sinh t \\ a \sinh t & b \cosh t \end{vmatrix} \, dt = abT.$$

Bei Einheitshyperbel:  $F_{\text{Sec}} = T$ .

### 5.5 Krümmung ebener Kurven

Die *Krümmung* einer Kurve in einem Punkt ist die Änderung der Richtung in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg.

*Definition* (Krümmung). Gegeben sei eine Kurve

$$\vec{x} = \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$$

(„natürliche Parametrisierung“ bzgl. der Kurvenlänge). Dann ist die *Krümmung*

$$k(s) := \frac{d\alpha}{ds},$$

wobei  $\alpha$  der Neigungswinkel der Kurventangente ist.

Bei kartesischen Koordinaten  $y = y(x)$ :

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für  $y'' > 0$  ist die Kurve konvex, für  $y'' < 0$  konkav.

Bei allgemeinen Koordinaten  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ :

$$k = \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Beispiel.* Ellipse mit  $x = a \cos t$  und  $y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ :

$$k = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Kreis mit  $a = b = R$ :  $k = \frac{1}{R}$  (konstante positive Krümmung).

*Definition.* Ein *Scheitelpunkt* einer Kurve ist ein Punkt mit extremaler Krümmung.

Notwendige Bedingung für einen Scheitelpunkt:  $\frac{dk}{dt} = 0$ .

*Definition.* Der *Krümmungskreis* in einem Kurvenpunkt  $P$  ist jener Kreis, der die Kurve in  $P$  berührt und Radius  $R = \frac{1}{k}$  (also in  $P$  gleiche Krümmung) besitzt. Sein Mittelpunkt heißt *Krümmungsmittelpunkt*.

Ein *Scheitelkrümmungskreis* ist ein Krümmungskreis in einem Scheitelpunkt.

Bei einer kartesischen Kurve  $y = y(x)$  gilt für den Krümmungsmittelpunkt  $M(\xi, \eta)$

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned}$$

Bei einer Kurve in allgemeiner Parameterdarstel-

lung gilt

$$\xi = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}},$$

$$\eta = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}.$$

*Beispiel.* Ellipse:

$$\xi(t) = a \cos t - \frac{b \cos t}{ab} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)$$

$$\eta(t) = b \sin t - \frac{a \sin t}{ab} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)$$

*Definition.* Die Menge aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve ist wieder eine Kurve und heißt *Evolute* der Kurve:  $\xi = \xi(t)$ ,  $\eta = \eta(t)$ .

Die ursprüngliche Kurve wird in diesem Zusammenhang *Envolvente* genannt („Abrollung“).

Die Evolute der Ellipse heißt *Asteroide*.

### 5.6 Jordan-Kurven

*Definition.* Eine *Jordan-Kurve* ist eine stetige geschlossene Kurve  $C$  in  $\mathbb{R}^2$  ohne Selbstüberschneidung, d.h.

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b, \text{ stetig}$$

mit

$$\vec{x}(a) = \vec{x}(b) \text{ und } \vec{x}(t_1) \neq \vec{x}(t_2) \quad \forall a < t < b.$$

*Definition.* Eine Menge heißt *zusammenhängend*, falls beliebige Punkte durch eine stetige Kurve innerhalb der Menge verbunden werden können.

**Satz 5.4.** *Es gibt zwei zusammenhängende disjunkte offene Mengen  $A, B$ , sodass*

$$\mathbb{R}^2 \setminus C = A \cup B$$

und  $A \cup B$  unzusammenhängend ist.

### 5.7 Isoperimetrische Ungleichung

**Satz 5.5** (Isoperimetrische Ungleichung). *Sei  $F$  der Flächeninhalt des inneren Bereichs einer Kurve  $C$  und  $L = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} dt$  ihre Gesamtbogenlänge. Dann gilt*

$$4\pi F \leq L^2,$$

mit Gleichheit genau für den Kreis.

*Beweis.* Die „natürliche“ Parameterdarstellung der Kurve ist

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad \text{mit } 0 \leq s \leq L.$$

Wähle den neuen Parameter  $t = \frac{2\pi s}{L} \Leftrightarrow s = \frac{Lt}{2\pi}$ :

$$x = x(t) = x\left(\frac{Lt}{2\pi}\right),$$

$$y = y(t) = y\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)$$

mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ , das sind also  $2\pi$ -periodische Funktionen. Entwickle diese in ihre Fourierreihen:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt)$$

und somit

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (nb_n \cos nt - na_n \sin nt)$$

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (nd_n \cos nt - nc_n \sin nt).$$

Es gilt

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{L}{2\pi}$$

und daher  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$ .

Sei o.B.d.A.  $C$  konvex. (Ansonsten nicht konvexen Bereich spiegeln, wodurch der Umfang gleich bleibt, die Fläche aber größer wird.) Es gilt daher nach der Leibniz'schen Sektorformel

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt.$$

Da  $C$  geschlossen ist, gilt

$$\int_0^{2\pi} y\dot{x} dt = \underbrace{x \cdot y \Big|_0^{2\pi}}_{=0, \text{ weil geschlossen}} - \int_0^{2\pi} \dot{y}x dt,$$

und somit

$$F = \int_0^{2\pi} x\dot{y} dt.$$

Es gilt die Vollständigkeitsrelation (Parseval-Gleichung) für die Fourierdarstellung einer Funktion (mit Fourierkoeffizienten  $A_n, B_n$ ):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2).$$

In unserem Fall:

$$\begin{aligned} f(t) = \dot{x}(t) & \quad A_n = nb_n & \quad B_n = -na_n, \\ f(t) = \dot{y}(t) & \quad A_n = nd_n & \quad B_n = -nc_n. \end{aligned}$$

Addition ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = 2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2. \end{aligned}$$

Für die Fläche gilt

$$\frac{F}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} xy dt = \sum_{n=0}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n),$$

somit

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi F &= 2\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) \\ &\quad - 4\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) \\ &= 2\pi^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} (na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 \right. \\ &\quad \left. + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Gleichheit kann für  $n > 1$  nur gelten, wenn  $c_n = d_n = 0$  und damit auch  $a_n = b_n = 0$ . Für  $n = 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1 \\ b_1 &= -c_1 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t \\ y(t) &= \frac{b_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t. \end{aligned}$$

Das ist die Parameterdarstellung des Kreises

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2. \quad \square$$

## 5.8 Ergänzung: Raumkurven

Eine Vektorfunktion in  $\mathbb{R}^3$  in einer unabhängigen Variable lässt sich schreiben als

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit  $a \leq t \leq b$ .

Der Tangentenvektor („Geschwindigkeit“) ist

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Bogenlänge:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\tilde{t}.$$

Umkehrfunktion  $s = s(t)$  von  $t = \psi(s)$  heißt natürliche Parameterdarstellung.

Krümmung:

$$k(s) = \left| \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} \right|.$$

(Vorzeichen würde keinen Sinn ergeben!)

## 6 Ebene Vektorfelder

*Definition.* Eine Funktion  $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt *Vektorfeld in der Ebene*. (Dabei setzen wir stetig differenzierbar voraus, außer in singulären Punkten.)

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}.$$

*Beispiel.* Gradientenfeld

$$\vec{v} = \text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Hier heißt  $f$  *Stammfunktion* (oder *Potenzial*) des Feldes  $\vec{v}$ .

*Definition.* Eine *Feldlinie*  $y = y(x)$  (kartesische Darstellung) ist eine Kurve, die in jedem Punkt tangential an den Feldvektor verläuft, d.h.

$$y' = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

(Differentialgleichung für die Feldlinie) gilt.

*Bemerkung.* Die *Äquipotenziallinien*  $f(x, y) = c$  (hier ist  $|\vec{v}|$  konstant) sind die Niveaulinien der Potenzialfunktion  $z = f(x, y)$ .

Ein Gradientenfeld steht also senkrecht auf die Äquipotenziallinien.

### 6.1 Green'scher Satz

Sei  $B$  ein kompakter Bereich in  $\mathbb{R}^2$ , stückweise glatt umrandet und  $C = \partial B$  so orientiert, dass der Normalvektor  $\vec{n}$  nach außen zeigt. ( $\vec{n}$  entsteht aus  $\vec{t}$  durch Drehung um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn.)

Die Randkurve sei also

$$C : \vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

mit  $a \leq t \leq b$  und

$$\vec{t} = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Die durch  $C$  strömende Materie ist

$$\int_a^b \vec{v}(x(t), y(t)) \cdot \vec{n}_0(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt =: \Phi(C).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \Phi(C) &= \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt \\ &\quad - \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt \\ &= \int_C -Q(x, y) dx + P(x, y) dy. \end{aligned}$$

*Beispiel.*  $\vec{v} = -\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , also Randkurve  $C$  ein Kreis mit

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Dann gilt

$$\Phi(C) = -\frac{1}{R^2} \int_C y dx - x dy = \frac{2\pi R^2}{R^2} = 2\pi.$$

*Bemerkung.* Laut Leibniz'scher Sektorformel gilt für den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} \int_C \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

*Bemerkung.* Wenn  $B$  keine Löcher enthält, kann man sich den Weg „gegen den Uhrzeigersinn außen herum“ vorstellen. Man spricht von einem *Ringintegral*.

*Definition.* Die *Quellwirkung* eines Bereichs ist definiert als

$$Q(B) = \iint_B \underbrace{\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{\text{Divergenz } \text{div } \vec{x}} dx dy.$$

**Satz 6.1** (Gauß, Green). *Es gilt*

$$Q(B) = \Phi(\partial B),$$

also

$$\iint_B \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial B} -Q dx + P dy.$$

Setze  $P := -Q$  und  $Q := P$ , dann folgt die alternative Formulierung

$$\iint_B \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\partial B} -Q dx + P dy.$$

Neue Interpretation:

$$\begin{aligned} \iint_B \text{div } \vec{v} dx dy &= \text{Quellwirkung } Q(B) \\ &= \text{in } B \text{ entsprungene Feldlinien.} \end{aligned}$$

$\text{div } \vec{v}$  kann als „Quelldichte“ aufgefasst werden.

**Satz 6.2** (Mittelwertsatz für Doppelintegrale). Sei  $B$  ein zusammenhängender kompakter Bereich in  $\mathbb{R}^2$  (analog in  $\mathbb{R}^s$ ) und  $f$  stetig,  $m_2(B) > 0$ . Dann existiert ein Punkt  $P(\xi, \eta) \in B$ , sodass

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{m_2(B)} \iint_B f(x, y) \, dx dy.$$

*Beweis.* Analog zum Mittelwertsatz für Einfachintegrale.  $\square$

Es gilt also

$$\exists P(\xi, \eta) \in B : \operatorname{div} \vec{v}(\xi, \eta) = \frac{1}{m_2(B)} \iint_B \operatorname{div} \vec{v} \, dx dy.$$

Die rechte Seite entspricht der Dichte der entstehenden Materie (Masse/Fläche).

$\operatorname{div} \vec{x}(x, y)$  ist die lokale *Quelldichte* in  $(x, y)$ . Ist sie größer als 0, spricht man von einer *Quelle*, wenn größer als 0 von einer *Senke* und sonst von *quellenfrei*.

## 6.2 Wegunabhängigkeit

*Definition.* Das Kurvenintegral  $\int_C P \, dx + Q \, dy$  heißt *wegunabhängig*, falls es nur von Anfangs- und Endpunkt, aber nicht vom Kurvenverlauf abhängt, d.h.

$$\oint P \, dx + Q \, dy = 0$$

für beliebige geschlossene Kurven.

Das Bereichsintegral  $\iint_B \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$  kann für beliebige Bereiche nur 0 sein, falls

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

(*Integrabilitätsbedingung* I.B.). ( $B$  darf „keine Löcher enthalten“, d.h. einfach zusammenhängend, d.h. Rand  $\partial B$  ist zusammenhängend.)

*Bemerkung.* Sei  $B$  einfach zusammenhängend,  $\vec{v}$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\text{Wegunabhängigkeit} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ (I.B.)}.$$

*Definition.* Wenn die Integrabilitätsbedingung I.B. erfüllt ist, heißt der Differentialausdruck  $P \, dx + Q \, dy$  *exakt*. (Das heißt das Kurvenintegral ist wegunabhängig.)

**Satz 6.3.** Zu einem exakten Differential gibt es eine Stammfunktion  $z = f(x, y)$  mit  $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ , d.h. das Vektorfeld  $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$  ist ein Gradientenfeld.

(*Physikalische Interpretation:*  $f(x, y)$  ist Potenzial.)

*Beweis.* Wähle einen „Anfangspunkt“  $A = (x_0, y_0)$  und setze

$$z = f(x, y) = \int_{x_0}^x P(\tilde{x}, y_0) \, d\tilde{x} + \int_{y_0}^y Q(x_0, \tilde{y}) \, d\tilde{y}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{= \frac{\partial P}{\partial y}}(x, \tilde{y}) \, d\tilde{y} \\ &= P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y) \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y). \quad \square$$

Interpretation: Stammfunktion ist potenzielle Energie des Endpunktes  $(x, y)$  bezogen auf das Nullniveau  $(x_0, y_0)$ .

## 7 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

*Definition.* Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  ein offener Bereich, heißt *stetig* in  $P_0(x_0, y_0)$ , wenn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

*Differenzierbarkeit:* partielle Ableitungen betrachten. Wenn Ableitung stetig: *stetig differenzierbar*.

### 7.1 Richtungsableitung

*Definition.* Die *Richtungsableitung* („Änderung“) von  $f$  in Richtung  $\vec{r}_0$  ist

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_0}(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{r}_0.$$

*Bemerkung.*

$$\text{grad } f \cdot \vec{r}_0 = \underbrace{|\text{grad } f|}_{\text{vorgeg.}} \cdot \underbrace{|\vec{r}_0|}_{=1} \cdot \cos \angle(\underbrace{\text{grad } f, \vec{r}_0}_{\text{vorgeg.}}),$$

$\text{grad } f$  zeigt also in Richtung extremaler Richtungsableitung.

### 7.2 Linearisierung

*Definition.*  $z = f(\vec{x})$  heißt *differenzierbar* in  $\vec{x}_0$ , falls eine lineare Funktion  $df|_{\vec{x}_0}$  existiert, sodass

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - df|_{\vec{x}_0}(\vec{h})}{|\vec{h}|} = 0$$

gilt.

*Bemerkung.* Die partiellen Ableitungen existieren dann automatisch (Spezialisierung von  $\vec{h}$  in Koordinatenrichtungen).

*Bemerkung.* Das *Differential*  $df|_{\vec{x}_0}$  kann man z.B. definieren als

$$df|_{\vec{x}_0} : dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0).$$

#### 7.2.1 Anwendung 1: Fehlerrechnung

Betrachte die Formel

$$E = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Messen mit gewissem Fehler:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1\text{kg} \pm 1\text{g} & \Rightarrow \Delta m &= 0.001 \\ v_0 &= 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 1\% & \Rightarrow \Delta v &= 0.01 \end{aligned}$$

Linearisierung:

$$\begin{aligned} \Delta E &\approx dE = \frac{\partial E}{\partial m}(m_0, v_0)\delta m + \frac{\partial E}{\partial v}(m_0, v_0)\Delta v \\ &= \frac{v_0^2}{2}\delta m + m_0 v_0 \Delta v \\ &= 0.0005 + 0.01 = 0.0105 \end{aligned}$$

ist der *absolute Fehler*. Der *relative Fehler* ist also

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\delta E}{E} = 0.021.$$

#### 7.2.2 Anwendung 2: Inverse Funktionen

Betrachte Koordinatentransformationen (z.B. Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \varphi & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

*Definition.* Die *Jakobi-Funktionaldeterminante* ist definiert als

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

**Satz 7.1** (Hauptsatz über inverse Funktionen). Die stetig differenzierbare Transformation  $x = x(u,v), y = y(u,v)$  ist in einer Umgebung von  $(u_0, v_0)$  eindeutig umkehrbar genau dann, wenn die *Jakobi-Funktionaldeterminante*  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$  im Punkt  $(u_0, v_0)$  von 0 verschieden ist.

*Beispiel.* Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r. \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation: Flächenverzerrungsverhältnis.

### 7.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten (also räumliche Polarkoordinaten) berechnen sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varrho &: \text{Projektion von } r \text{ auf } (x,y)\text{-Ebene} \\ \varphi &= \angle(x^+, \varrho), 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (\text{„geogr. Länge“}) \\ \vartheta &= \angle(z^+, r), 0 \leq \vartheta < \pi \quad (\text{„Poldistanz“}) \end{aligned}$$

In die andere Richtung:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= \varrho \sin \varphi = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Koordinatenflächen:

$$\begin{array}{ll} r = \text{const.} & \text{Kugel} \\ \varphi = \text{const.} & \text{Halbebene} \\ \vartheta = \text{const.} & \text{Kegel} \end{array}$$

Betrachte Jakobi-Funktionaldeterminante:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cdot \sin \vartheta. \end{aligned}$$

$J$  ist also genau dann 0, wenn  $r = 0$  oder  $\vartheta = 0, \pi, 2\pi, \dots$  ( $z$ -Achse).

Eine geometrische Interpretation der Jakobi-Funktionaldeterminante wäre das Volumsverzerrungsverhältnis.

*Bemerkung.* Allgemeiner *Flächenbegriff*: Vektorfunktion

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

für  $(u, v) \in B^* \subseteq \mathbb{R}^2$ .

### 7.4 Interpretation von Abbildungen

Funktion	Interpretation
$\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$	kartesische Funktion
$\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$	Kurve
$\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$	Kurve
$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$	kartesische Funktion
$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	ebenes Vektorfeld
$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$	Fläche
$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$	kartesische Funktion
$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	räumliches Vektorfeld

### 7.5 Satz von Taylor im $\mathbb{R}^2$

Sei  $z = f(x, y)$ . Definiere Hilfsfunktion

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk),$$

kann also für  $F$  den Taylor-Satz in einer Variablen  $t$  anwenden,  $t_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} F(t) &= F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots \\ &\quad + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\vartheta t)}{(n+1)!}t^{n+1}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} F(0) &= f(x_0, y_0) \\ F'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k \end{aligned}$$

und mittels Kettenregel und Satz von Schwarz

$$\begin{aligned} F''(0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2. \end{aligned}$$

Für das Differential 2. Stufe heißt das

$$d^2 f|_{(x_0, y_0)}(h, k) = (h, k)H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix},$$

wobei

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* ist.

Das führt zum Taylorpolynom der Ordnung  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) &= \frac{1}{n!}d^n f|_{(x_0, y_0)} \\ &= \frac{1}{n!}(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k)^n f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Allgemein mit Entwicklungspunkt  $\vec{x}_0$  und  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_k)$ :

$$\begin{aligned} z &= f(\vec{x}) \\ df|_{\vec{x}_0}(\vec{h}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0)h_k \\ &= \text{grad } f(\vec{x}_0)\vec{h} \\ d^2 f|_{\vec{x}_0} &= \frac{1}{2}\vec{h}^t H \vec{h} \end{aligned}$$

mit der quadratischen Form

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ f_{x_n x_1} & & & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

(symmetrische Matrix der partiellen Ableitungen).

## 7.6 Globale und lokale Extrema

*Definition.* Wir nennen ein  $\vec{x}_0 \in D$  ein *globales Maximum*, wenn

$$\forall \vec{x} \in D : f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$$

und *globales Minimum*, wenn

$$\forall \vec{x} \in D : f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0).$$

**Satz 7.2** (Bolzano-Weierstraß). *Sei  $f$  stetig auf  $D$ ,  $D$  kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Dann nimmt  $f$  auf  $D$  ein Minimum und Maximum an.*

*Definition.*  $f$  besitzt im Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  ein *lokales Minimum*, falls eine  $\delta$ -Umgebung  $U$  von  $\vec{x}_0$  existiert mit

$$\forall \vec{x} \in U \cap D : f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0).$$

$f$  besitzt im Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  ein *lokales Maximum*, falls eine  $\delta$ -Umgebung  $U$  von  $\vec{x}_0$  existiert mit

$$\forall \vec{x} \in U \cap D : f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0).$$

Minimum/Maximum *im eigentlichen Sinne*: „ $>$ “ bzw. „ $<$ “.

**Satz 7.3** (notwendige Bedingung). *Angenommen  $f$  besitzt in einem Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  ein lokales Extremum und  $f$  ist partiell differenzierbar in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$ . Dann folgt*

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 \forall i = 1, 2, \dots$$

*Falls  $f$  differenzierbar ist, gilt  $df|_{\vec{x}_0} = 0$ .*

*Beweis.* Betrachte einzelne „Koordinatenfunktionen“; die jeweilige Ableitung muss 0 sein, somit  $\text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ . Falls  $f$  differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} df|_{\vec{x}_0} &= \text{grad } f(\vec{x}_0)^T \cdot \vec{x}_0 = f_x(\vec{x}_0) + f_y(\vec{x}_0) \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Globale Extrema:

1. Berechne kritische Punkte (Kandidaten für lokale Extrema im Inneren von  $D$ )
2. Entscheide, ob Kandidaten Extrema sind oder nicht
3. Untersuche Rand des Definitionsbereichs

### 7.6.1 Hinreichende Bedingung

Betrachte Hesse-Matrix

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

(nach Satz von Schwarz symmetrisch).

- $H$  positiv semidefinit ( $\forall x : H(x) \geq 0$ ): lokales Minimum
- $H$  positiv definit ( $\forall x \neq 0 : H(x) > 0$ ): lokales Minimum im eigentlichen Sinne
- $H$  negativ semidefinit ( $\forall x : H(x) \leq 0$ ): lokales Maximum
- $H$  negativ definit ( $\forall x \neq 0 : H(x) < 0$ ): lokales Maximum im eigentlichen Sinne
- $H$  indefinit: kein Extremum, Sattelpunkt

Gleichwertige Bedingungen über Determinante:

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

- $\det H \geq 0$  und  $\det A \geq 0$ : lokales Minimum
- $\det H > 0$  und  $\det A > 0$ : lokales Minimum im eigtl. Sinne
- $\det H \geq 0$  und  $\det A \leq 0$ : lokales Maximum
- $\det H > 0$  und  $\det A < 0$ : lokales Maximum im eigtl. Sinne
- $\det H < 0$ : Sattelpunkt

Allgemein:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Hauptminorenkriterium:

$$D_k = \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1} & \dots & h_{kk} \end{vmatrix}.$$

- $H$  positiv definit  $\Leftrightarrow D_k > 0 \forall k$ .
- $H$  negativ definit  $\Leftrightarrow (-1)^k D_k > 0 \forall k$ .

## 7.7 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

**Satz 7.4.** Seien  $f, g$  stetig differenzierbar,  $f$  besitze im Punkt  $\vec{x}_0 \in D$  ein Extremum unter der Nebenbedingung  $g(\vec{x}) = 0$ ,  $g_y(\vec{x}_0) \neq 0$ . Dann existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Lagrange-Multiplikator) mit

$$\begin{aligned}f_x(\vec{x}_0) + \lambda g_x(\vec{x}_0) &= 0 \\f_y(\vec{x}_0) + \lambda g_y(\vec{x}_0) &= 0.\end{aligned}$$

Praktische Vorgangsweise:

1.  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
2.  $F_x = 0, F_y = 0, F_\lambda = 0$
3. Das heißt

$$\begin{aligned}F_x &= f_x + \lambda g_x = 0 \\F_y &= f_y + \lambda g_y = 0 \\F_\lambda &= g(x, y) = 0.\end{aligned}$$

Allgemein:

1.  $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_m)$
2. Löse  $\text{grad } F = \vec{0}$

## 8 Differenzierbarkeit noch einmal

### 8.1 Differenzierbarkeit

*Definition.* Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen. Eine Funktion  $\vec{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt (total) *differenzierbar* in  $\vec{x}_0 \in U$ , wenn es eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, sodass

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + A(\vec{x} - \vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \vec{r}(\vec{x})$$

mit  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{r}(\vec{x}) = \vec{0}$  gibt.

**Lemma.** Wenn  $A$  existiert, dann ist  $A$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Seien  $A_1, A_2$  zwei Lösungen. Durch Subtrahieren der beiden Definitionsbedingungen erhält man

$$0 = (A_1 - A_2)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot (\vec{r}_1(\vec{x}) - \vec{r}_2(\vec{x})).$$

Setze nun  $\vec{x} = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{y}$ , wobei  $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$  und  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann folgt nach Division durch  $t$

$$0 = (A_1 - A_2) \cdot \vec{y} + \text{sgn}(t) \cdot \|\vec{y}\| \cdot (\vec{r}_1(\vec{x}_0 + t\vec{y}) - \vec{r}_2(\vec{x}_0 + t\vec{y})).$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks für  $t \rightarrow 0$  ist aber

$$0 = (A_1 - A_2)\vec{y},$$

somit  $A_1 = A_2$ . □

Schreibweise:

$$A = D\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{f}'(\vec{x}_0) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(\vec{x}_0).$$

Wir wissen bereits: Wenn alle partiellen Ableitungen von allen Koordinatenfunktionen von  $\vec{f}$  stetig in  $\vec{x}_0$  sind, dann ist  $\vec{f}$  differenzierbar in  $\vec{x}_0$ .

**Lemma (Kettenregel).** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n, \vec{f} : U \rightarrow V, \vec{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Setze  $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$ . Sei weiters  $\vec{f}$  differenzierbar in  $\vec{x}_0$  und  $\vec{g}$  differenzierbar in  $\vec{y}_0$ . Dann ist  $\vec{g} \circ \vec{f}$  differenzierbar in  $\vec{x}_0$ .

*Beweis.* Setze Differentiationsdefinition von  $\vec{f}$  in die von  $\vec{g}$  ein und erhalte so

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) &= \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) + D\vec{g}(\vec{y}_0) \cdot D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &\quad + \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_0\| D\vec{g}(\vec{y}_0)r_f(\vec{x}) + \left\| D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot r_f(\vec{x}) \right\| \cdot r_g(\vec{f}(\vec{x}))}_{R}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\|R\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \|D\vec{g}(\vec{y}_0)\| \cdot \|r_f(\vec{x})\| + \left\| D\vec{f}(\vec{x}_0) \right\| \cdot \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \|r_g(\vec{f}(\vec{x}))\| + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \|r_f(\vec{x})\| \cdot \|r_g(\vec{f}(\vec{x}))\|$$

und somit

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{R}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}.$$

Damit ist  $\vec{g} \circ \vec{f}$  in  $\vec{x}_0$  differenzierbar und es gilt

$$D(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}_0) = D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \cdot D\vec{f}(\vec{x}_0). \quad \square$$

## 8.2 Implizite Funktionen

**Lemma.** Sei  $\vec{f} : B(\vec{x}_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^q$  auf  $B(\vec{x}_0, r)$  stetig differenzierbar und gelte  $\|\vec{f}'(\vec{x})\| \leq M$  für alle  $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, r)$ . Dann gilt für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in B(\vec{x}_0, r)$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \leq M \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y}) = - \int_0^1 \frac{d}{dt} \vec{f}(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})) dt = \int_0^1 -\vec{f}'(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) dt$$

und somit

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \leq \int_0^1 \|\vec{f}'(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))\| \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\| dt \leq M \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|. \quad \square$$

**Satz 8.1** (Hauptsatz über implizite Funktionen). Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^q$  offen,  $\vec{F} : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^q$  auf  $U \times V$  stetig differenzierbar und  $\vec{x}_0 \in U$ ,  $\vec{y}_0 \in V$  mit

$$\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \text{ invertierbar.}$$

Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  und eine stetige Funktion  $\vec{f} : B(\vec{x}_0, \delta) \rightarrow B(\vec{y}_0, \varepsilon)$  mit

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$$

für alle  $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$ .  $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$  ist die einzige Lösung der Gleichung  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$  in  $B(\vec{y}_0, \varepsilon)$ .

*Beweis.* Idee: Formuliere  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$  als Fixpunktproblem, d.h.

$$\vec{f}(\vec{x}) - B^{-1} \vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{f}(\vec{x}),$$

wobei  $B := \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  lt. Voraussetzung invertierbar ist.

Definiere die Abbildung  $A$  als

$$A : \vec{g} \mapsto \vec{g} - B^{-1} \vec{F}(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})).$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes existieren  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$ , sodass für  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$  und  $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| < \varepsilon$

$$\|A\| = \left\| I - B^{-1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \right\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left\| B^{-1} \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}_0) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

gilt. Betrachte die Menge

$$M = \{\vec{g} \in \mathcal{C}(B(\vec{x}_0, \delta), \mathbb{R}^q) \mid \vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0 \text{ und } \forall \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) : \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{y}_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

1.  $M$  ist als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes der stetigen Funktionen ebenfalls ein vollständiger metrischer Raum mit der Supremumsnorm

$$\|\vec{g}\| := \sup_{\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)} \|\vec{g}(\vec{x})\|.$$

2.  $A$  bildet  $M$  in sich ab: Sei  $\vec{g} \in M$ . Dann gilt

$$\|A\vec{g} - \vec{y}_0\| \leq \underbrace{\|A\vec{g} - A\vec{y}_0\|}_{\leq \frac{1}{2}\|\vec{g} - \vec{y}_0\|} + \underbrace{\|A\vec{y}_0 - \vec{y}_0\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

denn

$$\|A\vec{y}_0 - \vec{y}_0\| \leq \|B^{-1}F(\vec{x}, \vec{y}_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Weiters ist

$$(A\vec{g})(\vec{x}_0) = \underbrace{\vec{g}(\vec{x}_0)}_{\vec{y}_0} - B^{-1}F(\vec{x}_0, \underbrace{\vec{g}(\vec{x}_0)}_{\vec{y}_0}) = \vec{y}_0,$$

somit  $A\vec{g} \in M$ .

3.  $A$  ist eine Kontraktion auf  $M$ : Sei  $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$  fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}(\vec{y}) &= \vec{y} - B^{-1}\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \|\vec{\Phi}'(\vec{y})\| &= \left\| I - B^{-1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \right\| \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

für  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$  und  $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| < \varepsilon$ .

Nach dem Lemma gilt daher

$$\left\| \vec{\Phi}(\vec{y}) - \vec{\Phi}(\vec{z}) \right\| \leq \frac{1}{2} \|\vec{y} - \vec{z}\|,$$

also

$$\|A\vec{g}_1 - A\vec{g}_2\| \leq \frac{1}{2} \|\vec{g}_1 - \vec{g}_2\|.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es daher genau einen Fixpunkt  $\vec{f} \in M$  mit  $A\vec{f} = \vec{f}$ , also

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{x}) - B^{-1}\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) &= \vec{f}(\vec{x}) \\ \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

□

**Satz 8.2** (Differenzierbarkeit impliziter Funktionen). *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^p, V \subseteq \mathbb{R}^q$  offen,  $\vec{F} : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^q$  stetig differenzierbar (eigtl. reicht differenzierbar in  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ) auf  $U \times V$ ,  $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ ,  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  invertierbar. Sei weiters  $\vec{f} : B(\vec{x}_0, \delta) \rightarrow B(\vec{y}_0, \varepsilon)$  eine stetige Funktion mit  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$  für  $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$ . Dann ist  $\vec{f}$  in  $\vec{x}_0$  differenzierbar und es gilt mit  $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0)$*

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) = -\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0).$$

*Beweis.* O.B.d.A. seien  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  und  $\vec{y}_0 = \vec{0}$ . Setze  $B_1 := \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{0}, \vec{0})$  und  $B_2 := \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{0}, \vec{0})$ . Dass  $F$  differenzierbar in  $(\vec{0}, \vec{0})$  ist, heißt

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} + B_1\vec{x} + B_2\vec{y} + \|(\vec{x}, \vec{y})\| \cdot \vec{r}(\vec{x}, \vec{y})$$

mit  $\lim_{(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{0}, \vec{0})} \vec{r}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ .

Wähle die Norm  $\|(\vec{x}, \vec{y})\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ . Dann gilt

$$\vec{0} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = B_1\vec{x} + B_2\vec{f}(\vec{x}) + \left(\|\vec{x}\| + \|\vec{f}(\vec{x})\|\right) \cdot \vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$$

und somit

$$\Leftrightarrow \vec{f}(\vec{x}) = -B_2^{-1} B_1 \vec{x} + \left( \|\vec{x}\| + \|\vec{f}(\vec{x})\| \right) \cdot B_2^{-1} \vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})). \quad (1)$$

Zu zeigen ist also

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{\|\vec{x}\| + \|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} \cdot B_2^{-1} \vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}.$$

Es gilt

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} B_2^{-1} \vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0},$$

weil  $\vec{f}$  stetig ist. Es genügt also zu zeigen, dass  $\frac{\|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|}$  und somit auch

$$\frac{\|\|\vec{x}\| + \vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|}$$

beschränkt bleibt.

Es gibt  $\varepsilon_1 < \varepsilon$  und  $\delta_1 < \delta$ , sodass für  $\|\vec{x}\| < \delta_1$  auch  $\|\vec{f}(\vec{x})\| < \varepsilon_1$  und

$$\|\vec{r}(\vec{x}, \vec{y})\| \leq \frac{1}{2 \|B_2^{-1}\|}$$

gilt. Es gilt dann für  $\|\vec{x}\| < \delta_1$

$$\|\vec{r}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))\| \leq \frac{1}{2 \|B_2^{-1}\|}.$$

Setzt man das in (1) ein, erhält man

$$\|\vec{f}(\vec{x})\| \leq \|B_2^{-1} B_1\| \cdot \|\vec{x}\| + \left( \|\vec{x}\| + \|\vec{f}(\vec{x})\| \right) \cdot \|B_2^{-1}\| \cdot \frac{1}{2 \|B_2^{-1}\|}.$$

Daraus folgt

$$\|\vec{f}(\vec{x})\| \leq (\|B_2^{-1} B_1\| + \frac{1}{2}) \|\vec{x}\| + \frac{1}{2} \|\vec{f}(\vec{x})\| \leq (2 \|B_2^{-1} B_1\| + 1) \|\vec{x}\|$$

und somit

$$\frac{\|\vec{f}(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} \leq 2 \|B_2^{-1} B_1\| + 1. \quad \square$$

*Bemerkung.* Unter der Voraussetzung von Satz 8.1 gibt es eine Umgebung von  $\vec{x}_0$ , auf der  $\vec{f}$  stetig differenzierbar ist.

*Beweis.* Nach dem Hauptsatz existiert auf einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  eine stetige Funktion  $\vec{f}$  mit

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = 0.$$

$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}$  ist nach Voraussetzung stetig.  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  ist invertierbar, und damit ist  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}$  auf einer Umgebung von  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  invertierbar (denke an Formel für Inverse:  $\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}\right)^{-1}$  ist stetig auf einer Umgebung von  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ).

Nach Satz 8.2 ist  $\vec{f}$  in jedem Punkt mit  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$  invertierbar differenzierbar. Daher ist

$$\vec{f}'(x) = - \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)^{-1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))$$

stetig und  $\vec{f}$  ist daher auf einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  stetig differenzierbar. □

**Satz 8.3** (Lagrange). Sei  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^q$  und seien  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{N} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $p < q$  stetig differenzierbare Funktionen. Wenn in  $\vec{x}_0 \in U$  eine Extremstelle von  $f$  unter den Nebenbedingungen  $\vec{N}(\vec{x}) = \vec{0}$  vorliegt, dann gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}_0) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial \vec{N}_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, q.$$

**Satz 8.4** (Inverse Funktionen). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^p$  offen,  $\vec{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig differenzierbar. Für  $\vec{x}_0 \in U$  sei  $\vec{f}'(\vec{x}_0)$  invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $\vec{x}_0$  und eine offene Umgebung  $W$  von  $\vec{f}(\vec{x}_0)$ , sodass die Funktion  $\vec{f} : V \rightarrow W$  bijektiv ist.

Die Umkehrabbildung  $\vec{g} : W \rightarrow V$  ist differenzierbar und es gilt

$$\vec{g}'(\vec{f}(\vec{x}_0)) = (\vec{f}'(\vec{x}_0))^{-1}.$$

### 8.3 Mehrdimensionale Polarkoordinaten

$$\vec{x} = r \cdot \vec{x}_d(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-2}).$$

Betrachte die Jacobi-Matrix

$$J_d = \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta_{d-2}}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \right).$$

Es gilt

$$|J_d| = r^{d-1} \sin \vartheta_1 (\sin \vartheta_2)^2 (\sin \vartheta_3)^3 \dots (\sin \vartheta_{d-2})^{d-2}.$$

### 8.4 Kalkül der alternierenden Differentialformen

#### 8.4.1 Definitionen

Bisher hatten wir zwei Typen von Integralen:

- Bereichsintegrale der Form

$$\int_B \dots \int f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d,$$

- Kurven- und Oberflächenintegrale der Form

$$\int_C P dx + Q dy + R dz \quad \text{bzw.} \quad \iint_B P dydz + Q dzdx + R dxdy.$$

Idee: Betrachte alles hinter dem Integral als Integranden, also

$$\omega = f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d.$$

*Definition* (Dach-Produkt). Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Addition und skalarer Multiplikation. Definiere

$$\bigwedge^k V := \text{span}\{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_k \mid \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V\}$$

mit den Regeln

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \quad (\text{somit } \vec{v} \wedge \vec{v} = 0) \\ \lambda \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= \vec{v}_1 \wedge \lambda \vec{v}_2 = \lambda(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Eine Basis von  $\bigwedge^k V$  ist

$$\{\vec{e}_H = \vec{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_k} \mid H = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}, |H| = k\}.$$

Die Summe aller  $\bigwedge^k V$  ergibt den Vektorraum

$$\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k V$$

mit einem Produkt  $\wedge$  (eine *Graßmann-Algebra*), wobei

$$\dim \bigwedge V = 2^n.$$

*Bemerkung.*  $df$  ist eine lineare Abbildung, also  $df \in (\mathbb{R}^n)^*$  (Menge der *Kovektoren*).

*Beispiel.*  $P dx \wedge dy + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^n)^*$

*Definition.* Bezeichne mit  $F^k(U)$  die  $k$ -Formen auf  $U$ . Setze  $\deg \omega := k$  für  $\omega \in F^k(U)$ .

*Definition* (Äußere Ableitung). Für die *äußere Ableitung*  $d : F^k(U) \rightarrow F^{k+1}(U)$  gilt

1.  $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ ,
2.  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta$ ,
3.  $d(d\omega) = 0$ ,
4.  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ .

Für

$$\omega = \sum_H a_H dx_H \in F^k(U)$$

gilt

$$d\omega = \sum_H d(a_H dx_H) = \sum_H (da_H \wedge dx_H + (-1)^0 a_H d(dx_H)) = \sum_H da_H \wedge dx_H.$$

*Definition.* Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $W = \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi : W \rightarrow U$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1(U)$ . Definiere  $\Phi^* : F^k(U) \rightarrow F^k(W)$  durch

$$\Phi^* g = g \circ \Phi.$$

**Lemma.** *Es gilt*

$$d(\Phi^* f) = \Phi^*(df).$$

*Beweis.* Sei

$$\Phi : (u_1, \dots, u_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

Es gilt aufgrund der Kettenregel

$$\begin{aligned} d(\Phi^* f) &= d(f \circ \Phi) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \underbrace{\left( \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial u_m} du_m \right)}_{dx_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \underbrace{\left( \frac{\partial x_n}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial u_m} du_m \right)}_{dx_n} \\ &= \Phi^*(df). \end{aligned} \quad \square$$

*Definition.* Das Integral einer  $k$ -Form  $\omega$  über einer Mannigfaltigkeit  $M = \Phi(W)$ ,  $W \subseteq \mathbb{R}^k$ , ist definiert als

$$\int_{\Phi(W)=M} \omega := \int_W \Phi^* \omega.$$

(„Ziehen alles nach  $W$  runter und dort kennen wir uns aus.“)

### 8.4.2 Satz von Stokes

**Satz 8.5** (Stokes). *Sei  $M$  eine  $(k+1)$ -dimensionale orientierte Teilmannigfaltigkeit von  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Der Rand  $\partial M$  von  $M$  sei eine  $k$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von  $U$ . Für  $\omega \in F^k(U)$  gilt dann*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

*Beweis.* Sei o.B.d.A.  $W$  ein  $(k+1)$ -Simplex mit  $M = \Phi(W)$  (ansonsten aufteilen), d.h.

$$W = \{(u_1, \dots, u_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid u_1, \dots, u_{k+1} \geq 0, u_1 + \dots + u_{k+1} \leq 1\}.$$

Sei außerdem  $\eta = \Phi^*\omega$  o.B.d.A. ein Monom (ansonsten aufsummieren), d.h.

$$\Phi^*\omega = \eta = A \, du_1 \wedge \dots \wedge du_k.$$

Dann gilt für die Ableitung aufgrund des Lemmas

$$\begin{aligned} \Phi^*(d\omega) &= d(\Phi^*\omega) = d\eta = \left( \frac{\partial A}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial A}{\partial u_{k+1}} du_{k+1} \right) du_1 \wedge \dots \wedge du_k \\ &= (-1)^k \frac{\partial A}{\partial u_{k+1}} du_1 \wedge \dots \wedge du_{k+1}. \end{aligned}$$

Somit ist das Integral darüber

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_W \Phi^*(d\omega) = (-1)^k \int_W \frac{\partial A}{\partial u_{k+1}} du_1 \wedge \dots \wedge du_{k+1} \\ &= (-1)^k \int_{u_i \geq 0, \sum_{i=1}^k u_i \leq 1} du_1 \cdots du_k \left( \int_0^{1-\sum_{i=1}^k u_i} \frac{\partial A}{\partial u_{k+1}} du_{k+1} \right) \\ &= (-1)^k \int_{u_i \geq 0, \sum_{i=1}^k u_i \leq 1} (A(u_1, \dots, u_k, 1-\sum_{i=1}^k u_i) - A(u_1, \dots, u_k, 0)) du_1 \cdots du_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Das ist also ein Integral über einem  $k$ -Simplex.

Betrachte nun den Rand  $\partial W$ . Seine Eckpunkte seien

$$\begin{aligned} R_0 &= 0 \\ R_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ R_{k+1} &= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\partial W = (R_1, \dots, R_{k+1}) + (-1)^{k+1} (R_0, R_1, \dots, R_{k+1}) + \text{andere Flächen, wo } \eta = 0,$$

da dort eines der  $u_1, \dots, u_k$  konstant ist. Das heißt

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial W} \Phi^*\omega = (-1)^{k+1} \int_{(R_0, \dots, R_k)} \eta + \int_{(R_1, \dots, R_{k+1})} \eta.$$

Das erste Integral ist das Integral von  $\eta$  über einem  $k$ -Simplex, also genau der zweite Term in (2). Das zweite Integral wird „in die Grundebene projiziert“:

$$\begin{aligned} \int_{(R_1, \dots, R_{k+1})} \eta &= \int_{(R_1, \dots, R_k, R_0)} A(u_1, \dots, u_k, 1-\sum_{i=1}^k u_i) du_1 \cdots du_k \\ &= (-1)^k \int_{(R_0, R_1, \dots, R_k)} A(u_1, \dots, u_k, 1-\sum_{i=1}^k u_i) du_1 \cdots du_k. \end{aligned}$$

Das entspricht genau dem ersten Term in (2). □

**Korollar** (Integralsatz von Gauß, Green). *Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt mit abschnittsweise glattem Rand  $(S)$ . Der Rand sei orientiert durch ein äußeres Normalen-Einheitsfeld  $\vec{n}$ . Sei ferner  $\vec{F}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von  $V$ . Dann gilt*

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \oint_{(S)} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

mit der Abkürzung  $d\vec{S} = \vec{n} \, dS$ .

*Definition* (Rotation). Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfeldes  $F$  ist wieder ein dreidimensionales Vektorfeld und ist definiert als

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung.* Interpretiert man das Feld als Strömungsfeld, so gibt die Rotation für jeden Ort an, wie schnell und um welche Achse ein mitschwimmender Körper rotieren würde.

**Korollar.** *Sei  $M$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  und  $\partial M$  ihr Rand (z.B. eine Fläche und die sie umschließende Kurve). Dann gilt für ein Vektorfeld  $F$*

$$\iint_M (\operatorname{rot} F) \, dA = \oint_{\partial M} F \, dr.$$

## Literatur

- [1] Vorlesungsmitschrift
- [2] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Band 2. B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [3] W. Walter: Analysis 2. Springer, Berlin, 1995.
- [4] H. Flanders: Differential Forms with Applications to the Physical Sciences. Dover, New York, 1963.
- [5] S. H. Weintraub: Differential Forms. A Complement to Vector Calculus. Academic Press, San Diego, 1997.
- [6] H. Holmann, H. Rummler: Alternierende Differentialformen. B.I.-Wissenschaftsverlag, Zürich, 1981.