Formeln und Sätze

Jan Pöschko

14. November 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlentheorie

1.1 Teilbarkeit

$$
\begin{aligned}
a &\mid 0 \text{ für alle } a \\
a \mid b &\Leftrightarrow a \mid -b \\
a \mid b &\Leftrightarrow ta \mid tb \quad \text{mit } t \neq 0 \\
a_1 \cdot a_2 \mid b &\Rightarrow a_1 \mid b \\
a \mid b &\Rightarrow a \mid tb \\
a \mid b \wedge b \mid c &\Rightarrow a \mid c \\
a \mid b_1 \wedge a \mid b_2 &\Rightarrow a \mid (b_1 \pm b_2) \\
a \mid (b_1 + b_2) \wedge a \mid b_1 &\Rightarrow a \mid b_2 \\
a \mid b \wedge b \neq 0 &\Rightarrow |a| \leq |b|
\end{aligned}
$$

Betrand'sches Postulat: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt es eine Primzahl p mit

$$n \leq p < 2n$$

1.2 Größter gemeinsamer Teiler

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ggT}(a,b) &= \operatorname{ggT}(|a|,|b|) \\
\operatorname{ggT}(a,b) &= \prod_{p \text{ prim}} p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} \\
\operatorname{kgV}(a,b) &= \prod_{p \text{ prim}} p^{\max(\alpha_p,\beta_p)} \\
a \cdot b &= \operatorname{ggT}(a,b) \cdot \operatorname{kgV}(a,b)
\end{aligned}
$$

Euklidscher Algorithmus:

$$\operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(b, a - bk)$$

1.3 Kongruenzen

$a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
a \pm c &\equiv b \pm d \pmod{m} \\
ac &\equiv bd \pmod{m} \\
ta &\equiv tb \pmod{|t| \cdot m} \quad \text{mit } t \neq 0 \\
a^n &\equiv b^n \pmod{m}
\end{aligned}
$$

Chinesischer Restsatz: $m_1, m_2, \ldots, m_n$: paarweise teilerfremde positive ganze Zahlen
$a_1, a_2, \ldots, a_n$: ganze Zahlen
Es gibt genau ein $x \bmod m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} M &= m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n \\ M_i &= \frac{M}{m_i} \\ M_i \cdot y_i &\equiv 1 \pmod{m_i} \\ x &\equiv \sum_{i=1}^{n} a_i M_i y_i \pmod{M} \end{aligned}$$

1.4 Potenzreste

Euler-Fermat:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \quad \text{wenn } \operatorname{ggT}(a, m) = 1$$

Kleiner Satz von Fermat:

$$\begin{aligned} a^{p-1} &\equiv 1 \pmod{p} \quad \text{wenn } p \nmid a,\ p \text{ prim} \\ a^p &\equiv a \pmod{p} \quad \text{wenn } p \text{ prim} \end{aligned}$$

1.5 Fakultäten

Primfaktorzerlegung:

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

Satz von Wilson:

$$(m-1)! \equiv -1 \pmod{m} \Leftrightarrow m \text{ ist eine Primzahl}$$

1.6 Zahlentheoretische Funktionen

... sind multiplikativ:

$$f(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n) = f(m_1) \cdot f(m_2) \cdot \ldots \cdot f(m_n)$$

wenn m_1, m_2, ..., m_n paarweise teilerfremd

Eulersche φ-Funktion: Anzahl der $0 \leq a < m$ mit $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ für $m \geq 2$

$$\varphi(1) := 1$$

$$\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1) \qquad p \text{ prim}, \alpha \geq 1$$

$$\varphi(m) = \prod_{p|m} p^{\alpha_p - 1}(p-1) = m \cdot \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Anzahl der positiven Teiler:

$$\tau(p^\alpha) = \alpha + 1$$

Summe der positiven Teiler:

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + \ldots + p^\alpha = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

2 Ungleichungen

2.1 Elementarungleichungen

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
x^2 &\geq 0 \\
x^2 + 1 &\geq 2x \\
\left| \tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x} \right| &\geq 2 \\
x^2 + y^2 + z^2 &\geq xy + yz + zx \\
\tfrac{x^2+y^2}{2} &\geq xy \\
2(x^2 + y^2) &\geq (x+y)^2 \\
(x+y)^2 &\geq 4xy
\end{aligned}
$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^+$:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy} \\
x + \tfrac{1}{x} &\geq 2 \\
\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x} &\geq 2 \\
\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y} &\geq \tfrac{4}{x+y} \\
x + y &\geq 2\sqrt{xy} \\
(x+y)(y+z)(z+x) &\geq 8xyz \\
\tfrac{x+y}{4} &\geq \tfrac{xy}{x+y} \\
\tfrac{x}{y+z} + \tfrac{y}{x+z} + \tfrac{z}{x+y} &\geq \tfrac{3}{2}
\end{aligned}
$$

2.2 Mittelungleichungen

Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Harmonisch-geometrische Mittelungleichung: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Arithmetisch-harmonische Mittelungleichung: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot (\tfrac{1}{x_1} + \tfrac{1}{x_2} + \ldots + \tfrac{1}{x_n}) \geq n^2$$

Durch Erweitern um $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$:

$$\frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} = \frac{3x_1x_2x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}$$

$$\frac{4}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}} = \frac{4x_1x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2}$$

Arithmetisch-quadratische Mittelungleichung: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

Allgemeine Mittelungleichung: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+;\quad \alpha < \beta \in \mathbb{R}$

$$m_\alpha := \begin{cases} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} & \text{für } \alpha = 0, \\ \sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}} & \text{für } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\min_i x_i \leq m_\alpha \leq m_\beta \leq \max_i x_i$$

Gleichheit bei $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Gewichtete Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung:

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \leq \left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

2.3 Standardungleichungen

Umordnungsungleichung („Hauptsatz“): $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$

$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$

$\langle c_i \rangle$ ist Permutation von $\langle b_i \rangle$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$$

Gleichheit bei $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ oder $b_1 = b_2 = \ldots b_n$

Bernoulli'sche Ungleichung: $x, \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \quad \text{für } x \geq -1 \text{ und } 0 \leq \alpha \leq 1$$
$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \text{für } x > -1 \text{ und } \alpha < 0 \text{ oder } \alpha > 1$$

Gleichheit bei $x = 0$, $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$

Tschebyscheff-Ungleichung: $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$$

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

Gleichheit bei $a_1 = a_2 = \ldots = a_n \wedge b_1 = b_2 = \ldots = b_n$

Cauchy-Ungleichung: $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$$

Gleichheit genau dann, wenn die Vektoren $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ proportional sind.

Hölder-Ungleichung: $x_i, y_i \geq 0; \quad p, q \neq 0 \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$p > 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$p < 1$ (mit $p \neq 0$ und $x_i y_i \neq 0$ falls $p < 0$): umgekehrte Ungleichung
Gleichheit bei $x_i^p = \lambda \cdot y_i^q$

Minkowski-Ungleichung: $x_i, y_i \geq 0; \quad p \neq 0 \in \mathbb{R}$
$p > 1$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$p < 1$ (mit $p \neq 0$ und $x_i y_i \neq 0$ falls $p < 0$): umgekehrte Ungleichung
Gleichheit bei $x_i = \lambda \cdot y_i$

3 Folgen und Reihen

3.1 Arithmetische Folgen

rekursiv: $a_1;\ a_{n+1} = a_n + d$
explizit: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_s = a_r + (s-r) \cdot d$$

Summenformel der endlichen arithmetischen Reihe:

$$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \tfrac{n}{2} = (2a_1 + (n-1) \cdot d) \cdot \tfrac{n}{2}$$

3.2 Geometrische Folgen

rekursiv: b_1; $b_{n+1} = b_n \cdot q$
explizit: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

$$b_s = b_r \cdot q^{s-r}$$

Summenformel der endlichen geometrischen Reihe:

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Summenformel der unendlichen geometrischen Reihe: (mit $|q| \leq 1$)

$$s = b_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

3.3 Summenformeln

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Riemann'sche Zeta-Funktion:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

$$\zeta(1) = \infty$$

$$\zeta(2) = \tfrac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \tfrac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \tfrac{\pi^6}{945}$$

4 Polynome

$$(a-b) \mid P(a) - P(b)$$

Nullstellensatz:

$$P(x) \cdot Q(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \vee Q(x) = 0$$
$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-a) \cdot Q(x)$$

Zwischenwertsatz: Aus $P(x_0) < 0$ und $P(x_2) > 0$ folgt: Es existiert ein x_1 mit $x_0 < x_1 < x_2$ und $P(x_1) = 0$.

Euler-Prinzip: Für die rationalen Nullstellen $P(\frac{Z}{N}) = 0$ mit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ und $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ gilt:

$$Z \mid a_0 \text{ und } N \mid a_0$$

Daraus folgt, dass für $a_n = 1$ jede rationale Nullstelle ganzzahlig ist.

Fundamentalsatz der Algebra: Ein Polynom $P(x)$ mit dem Grad $[P] = n$ kann höchstens n Nullstellen haben.
Folgerung 1: Falls $[P] \leq n$ gilt und $P(x)$ mehr als n Nullstellen hat, gilt

$$P(x) \equiv 0$$

Folgerung 2: Falls $[P] = [Q] = n$ gilt und die Gleichung $P(x) = Q(x)$ mehr als n Lösungen hat, gilt

$$P(x) \equiv Q(x)$$

Satz von Vieta: Für das Polynom $P(x) \equiv x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit den Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt:

$$a_{n-1} = -p_1; \quad a_{n-2} = p_2; \quad a_{n-3} = -p_3; \quad \ldots; \quad a_0 = (-1)^n p_n$$

Cauchy-Produkt von Potenzreihen:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots)$$
$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3)x^3 + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i\right) x^n$$

Satz von Eisenstein: Sei $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ und es existiere eine Primzahl p mit $p \mid a_i$ für alle $1 \le i \le n-1$, außerdem gelte $p^2 \nmid a_0$ und $p \nmid a_n$.
Daraus folgt, dass $P(x)$ nicht in ein Produkt von Polynomen mit rationalen Koeffizienten zerlegt werden kann.

4.1 Elementarsymmetrische Polynome

$$\begin{aligned}
p_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \\
p_2 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + \ldots \\
p_3 &= x_1x_2x_3 + \ldots \\
p_{n-1} &= p_n \cdot \left(\tfrac{1}{x_1} + \tfrac{1}{x_2} + \ldots + \tfrac{1}{x_n}\right)
\end{aligned}$$

Darstellung von symmetrischen Polynomen:

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = p_1 \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots = p_1^2 - 2p_2 \\
s_3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 \\
s_4 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3 - 4p_4 \\
s_5 &= x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + \ldots = p_1^5 - 5p_1^3p_2^2 + 5p_1p_2^2 + 5p_1^2p_3 - 5p_2p_3 + 5p_1p_4 - 5p_5 \\
(x+y)(y+z)(z+x) &= p_1p_2 - p_3 \\
x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + \ldots &= p_2^2 - 2p_1p_3 + 2p_4 \\
x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + \ldots &= p_2^3 - 3p_1p_2p_3 + 3p_3^2 + 3p_1^2p_4 - 3p_2p_4 - 3p_1p_5 + 3p_6 \\
xy^2z + yz^2x + zx^2y &= p_1p_3
\end{aligned}$$

4.2 Zerlegungen

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\
(a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3bc^2 + 3c^2a + 3ca^2 + 6abc \\
a^2 - b^2 &= (a+b) \cdot (a-b) \\
a^3 - b^3 &= (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \\
a^3 + b^3 &= (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \\
a^4 - b^4 &= (a-b) \cdot (a+b) \cdot (a^2 + b^2) \\
a^4 + b^4 &= (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2) \cdot (a^2 - \sqrt{2}ab + b^2) \\
a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 &= (a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a-b+c) \cdot (a-b-c) \\
a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^2 + b^2 - ab) \cdot (a^2 + b^2 + ab) \\
a^8 + 3a^6b^2 + 8a^4b^4 + 3a^2b^6 + b^8 &= (a^4 + a^2b^2 + b^4 - a^3b + ab^3) \cdot (a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^3b - ab^3) \\
a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 &= (a^2 + a + 1)^2 \\
a^{n+1} + b^{n+1} &= (a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}) \\
a^n + b^n &= (a+b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \text{für } n \text{ ungerade} \\
a^n - b^n &= (a+b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}) \quad \text{für } n \text{ gerade}
\end{aligned}
$$

Formel von Horner:

$$
a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})
$$

5 Geometrie

5.1 Dreieck

Kongruenz
Ähnlichkeit, Strahlensatz, zentrische Streckung

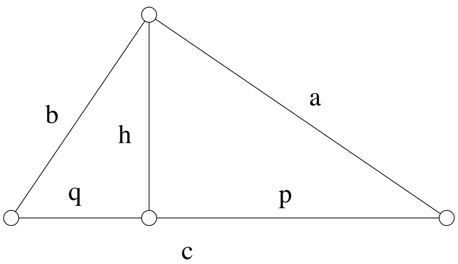
Satzgruppe von Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 = p \cdot q$$

$$a^2 = p \cdot c$$

$$b^2 = q \cdot c$$



Formel von Heron:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{mit } s = \tfrac{a+b+c}{2}$$

$$16A^2 = 2 \cdot (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$

Höhenschnittpunkt, In- und Umkreis:

$$\text{Umkreisradius } r = \frac{a+b+c}{4A}$$

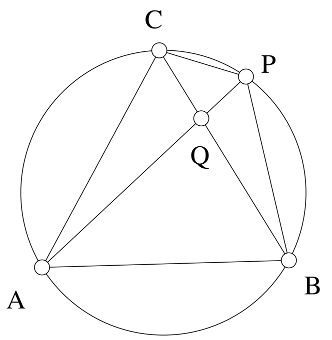
$$\text{Inkreisradius } \rho = \frac{A}{s}$$

Eine Winkelsymmetrale teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anderen.

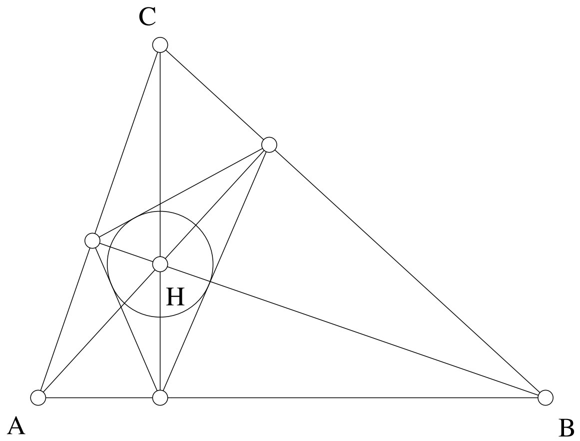
Sei P ein Punkt auf dem Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC, der nicht mit einem Eckpunkt zusammenfällt. AP schneide die Seite BC in Q. Dann gilt:

$$\overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PA}$$

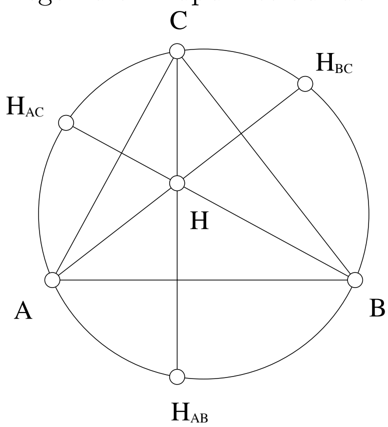
$$\tfrac{1}{\overline{PB}} + \tfrac{1}{\overline{PC}} = \tfrac{1}{\overline{PQ}}$$



Die Höhen in einem spitzwinkeligen Dreieick halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks. (Das bedeutet, dass der Höhenschnittpunkt der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks ist.)

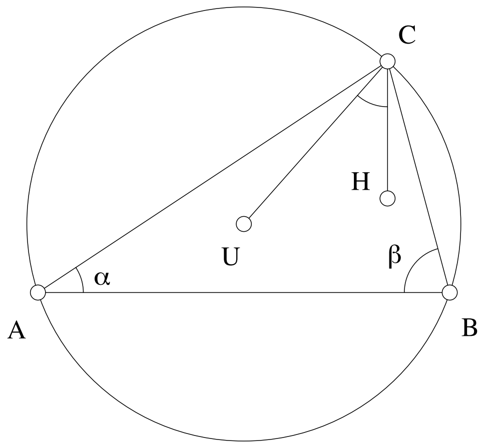


Spiegelt man in einem spitzwinkeligen Dreieick den Höhenschnittpunkt an den Seiten, so liegen die Bildpunkte auf dem Umkreis des Dreiecks.



In einem Dreieck gilt für den Winkel zwischen den Verbindungsstrecken von einem Eckpunkt zu Höhenschnittpunkt bzw. Umkreismittelpunkt:

$$\angle HCU = |\alpha - \beta|$$



Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Dreiecksungleichungen:

$$|a-b| < c < a+b \qquad s > c$$

$$|a-c| < b < a+c \qquad s > b$$

$$|b-c| < a < b+c \qquad s > a$$

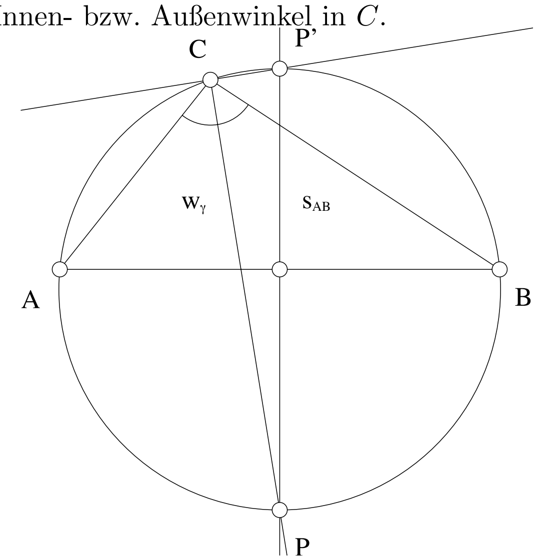
$$r \geq 2\rho$$

$$1 < \sin\tfrac{\alpha}{2} + \sin\tfrac{\beta}{2} + \sin\tfrac{\gamma}{2} < \tfrac{3}{2}$$

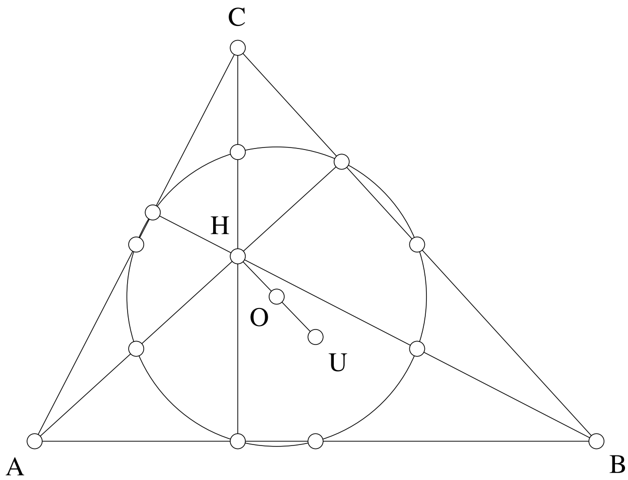
$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \tfrac{s}{r} \leq \tfrac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 - \tfrac{\rho}{r} \leq \tfrac{3}{2}$$

Südpolsatz: In einem Dreieck schneiden sich eine Seitensymmetrale und die gegenüberliegende Winkelhalbierenden (Innen- bzw. Außenwinkelsymmetrale) auf dem Umkreis.
Umkehrung: Wenn in einem Dreieck ABC die Seitensymmetrale der Seite AB den Umkreis in den Punkten P bzw. P' schneidet, halbieren die Strecken CP bzw. CP' den Innen- bzw. Außenwinkel in C.



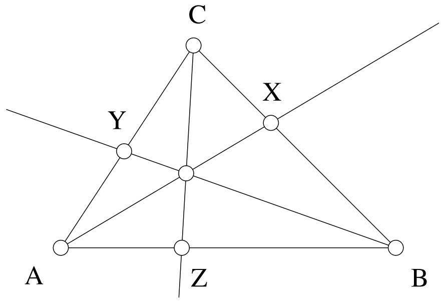
Feuerbach-Kreis (9-Punkte-Kreis): Der Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises ist der Halbierungspunkt der Strecke zwischen Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt. Auf dem Feuerbach-Kreis liegen die Höhenfußpunkte, die Seitenmittelpunkte und die Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte.



Satz von Ceva: Wenn sich in einem Dreieck die drei Ecktransversalen AX, BY, CZ in einem Punkt schneiden, dann gilt

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

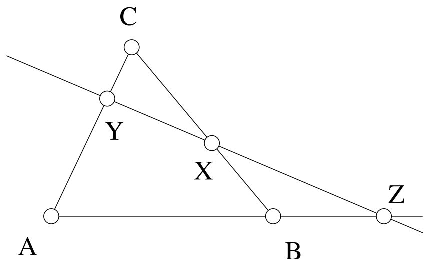
Umkehrung: Wenn für drei Ecktransversalen obige Gleichung gilt, dann schneiden sie sich in einem Punkt.



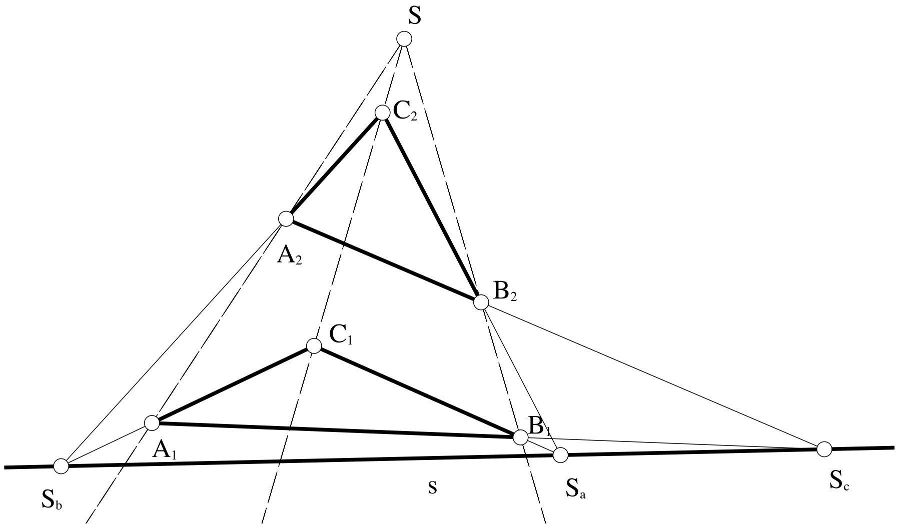
Satz von Menelaos: Eine Gerade schneidet die Seiten eines Dreiecks so in drei Punkten X, Y, Z, dass gilt:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

Umkehrung: Wenn für drei Punkte X, Y, Z auf den Seiten eines Dreiecks obige Gleichung gilt, dann sind sie kollinear.

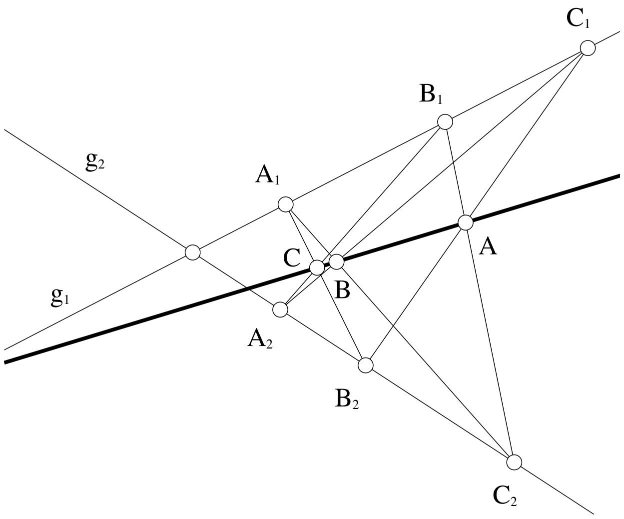


Satz von Desargues: Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier Dreiecke durch einen Punkt S, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden s.
Umkehrung: Liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden s, so gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Dreieckspunkte durch einen Punkt S.



Satz von Pappos: Auf zwei Geraden g_1 und g_2 seien drei Punkte A_1, B_1, C_1 bzw. A_2, B_2, C_2 gegeben. Dann liegen die Schnittpunkte der „kreuzweisen" Verbindungsgeraden A, B, C auf einer Gerade.

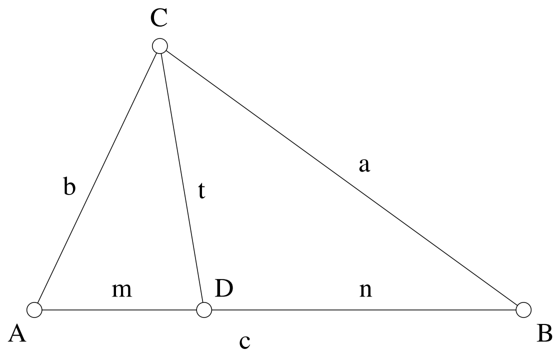
$$A = B_1C_2 \cap B_2C_1; \quad B = A_1C_2 \cap A_2C_1; \quad C = A_1B_2 \cap A_2B_1$$



Satz von Steward: In einem Dreieck teile die Ecktransversale CZ die gegenüberliegende Seite in die Abschnitte $AZ = m$ und $ZB = n$. Für die Länge $\overline{CZ} = t$ gilt:

$$t^2 = \frac{ma^2 + nb^2}{m+n} - mn$$

$$c(t^2 + mn) = ma^2 + nb^2$$



Folgerungen:

$$s_c = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2) - \tfrac{1}{4}c^2}$$

$$\omega_c = \sqrt{ab(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}}$$

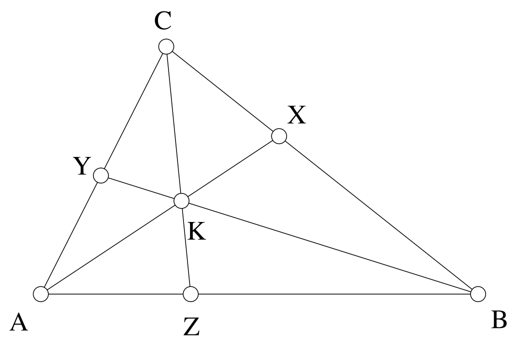
$$h_c = \tfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Satz von Steiner-Lehmus: Jedes Dreieck mit zwei gleich langen Winkelsymmetralen ist gleichschenkelig.

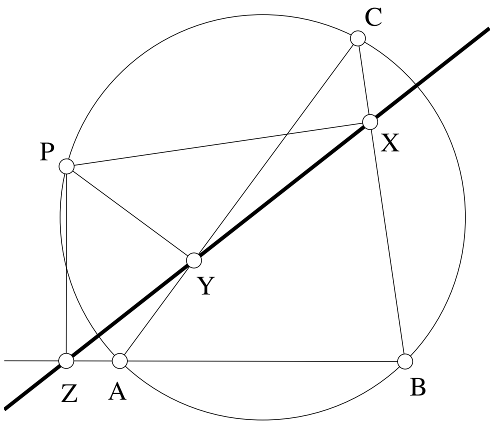
Satz von Euler-Gergonne: Für die Teilverhältnisse $u = \frac{AK}{KX}$, $v = \frac{BK}{KY}$, $w = \frac{CK}{KZ}$ dreier sich in K schneidenden Ecktransversalen eines Dreiecks $\triangle ABC$ gilt:

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \tfrac{1}{1+w} = 1$$

$$uvw = u + v + w + 2$$



Simson-Gerade: Es sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und X, Y, Z die Fußpunkte der von P auf die Dreiecksseiten gefällten Lote. Dann liegen X, Y, Z auf einer Geraden.

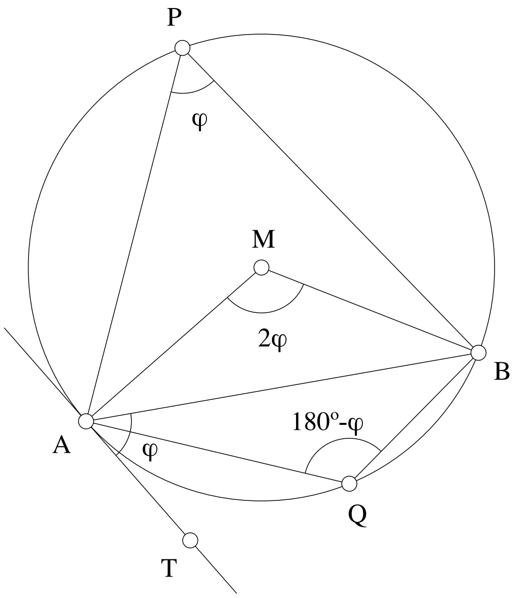


5.2 Kreis

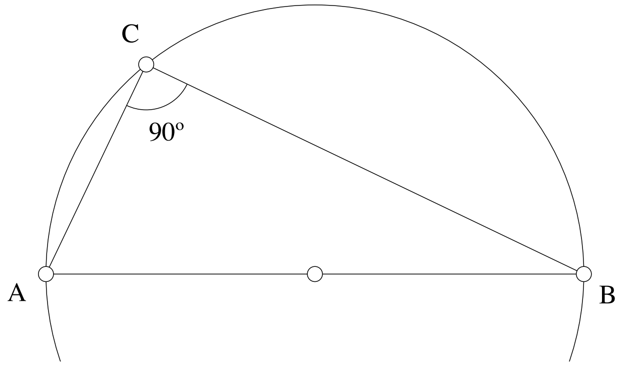
Peripheriewinkelsatz:

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AQB = \angle TAB =: \varphi$$

$$\angle AMB = 2 \cdot \angle APB = 2\varphi$$

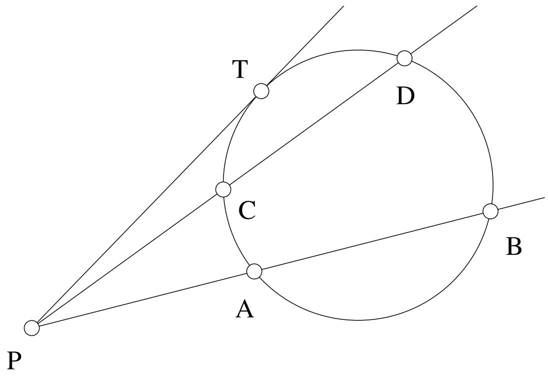


Satz von Thales: Die freien Ecken C aller rechtwinkligen Dreiecke mit gemeinsamer Hypotenuse AB liegen auf einem Kreis mit AB als Durchmesser.
Umkehrung: Jedes Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, besitzt einen rechten Winkel.

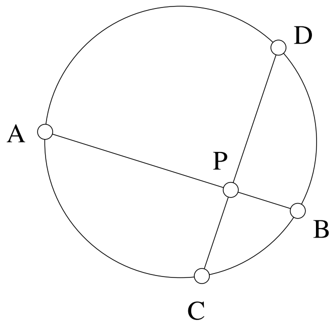


Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises:

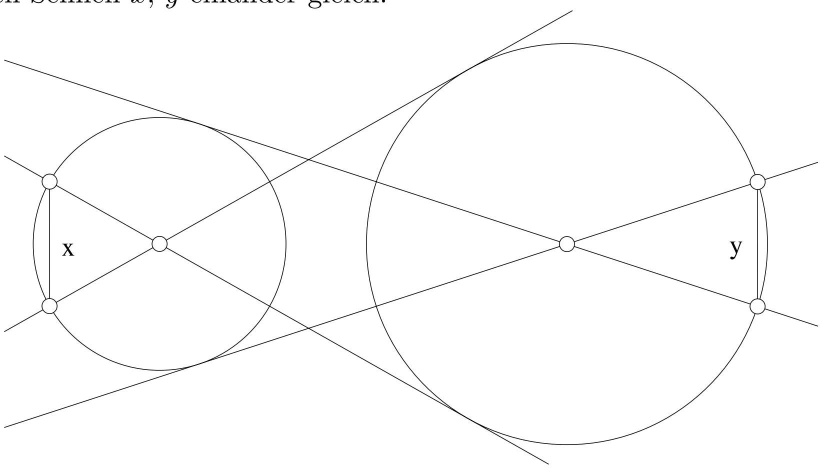
$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$



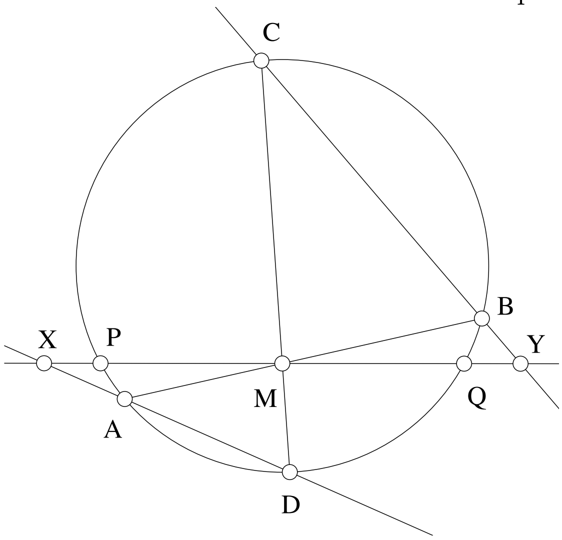
$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$



Netzhaut-Satz: Der Abstand der Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien a und b betrage $s > a + b$. Zieht man die Tangenten von einem der Mittelpunkte an den jeweils anderen Kreis, dann sind die durch die rückwärtigen Verlängerungen herausgeschnittenen Sehnen x, y einander gleich.



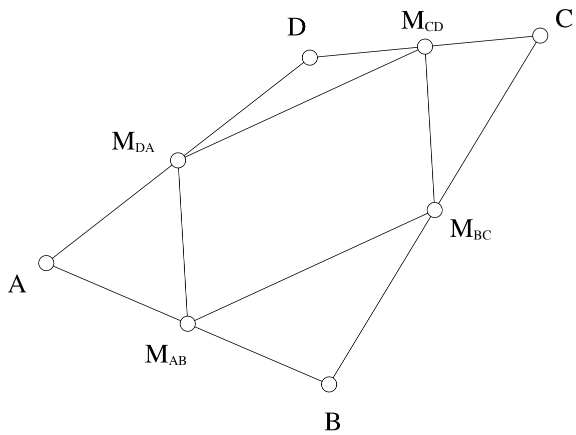
Schmetterlingssatz: Durch den Mittelpunkt M einer Sehne PQ eines Kreises werden zwei weitere Sehnen AB, CD gezeichnet. Die Sehnen AD und BC schneiden PQ in den Punkten X und Y. Dann ist M der Mittelpunkt von XY.



5.3 Viereck

Wenn eine Diagonale ein Viereck in zwei flächengleiche Hälften teilt, halbiert sie auch die andere Diagonale.
Umkehrung: Wenn eine Diagonale die andere halbiert, halbiert sie auch die Fläche des Vierecks.

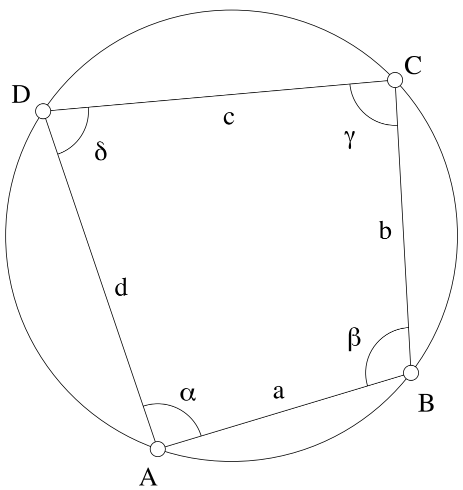
Varignon-Parallelogramm: Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen ebenen Vierecks, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt halb so groß wie der des Vierecks ist.



5.3.1 Sehnenviereck

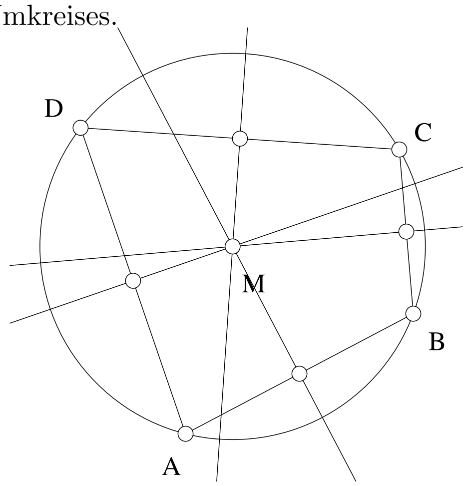
Die Summe gegenüberliegender Innenwinkel ist 180°.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$$



In einem konvexen Sehnenviereck $ABCD$ zerlegen die Diagonalen das Viereck in vier Dreiecke. Jeweils zwei gegenüberliegende sind zueinander ähnlich.

Die Mittelsenkrechten gegenüberliegender Seiten schneiden sich im Mittelpunkt des Umkreises.

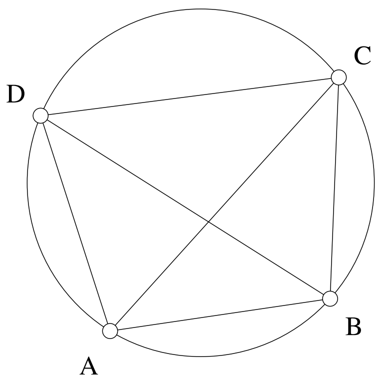


Satz von Brahmagupta:

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \quad \text{mit } s = \tfrac{a+b+c+d}{2}$$

Satz von Ptolemäus: In einem konvexen Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seitenlängen gleich dem Produkt der Diagonalen.

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$



Ungleichung von Ptolemäus: In jedem konvexen Viereck $ABCD$ gilt

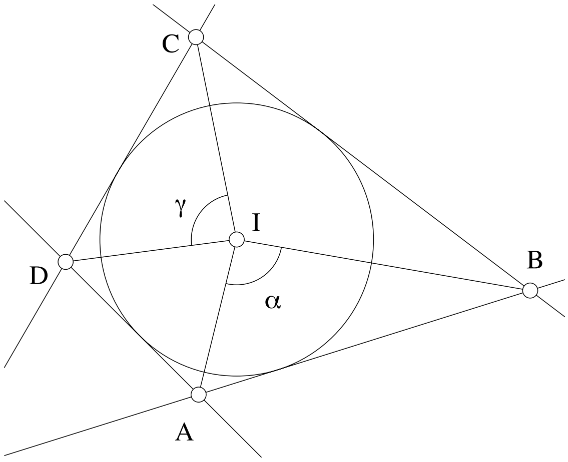
$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

mit Gleichheit bei einem Sehnenviereck.

5.3.2 Tangentenviereck

Die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten ist gleich der Summe der Längen der beiden anderen Gegenseiten.

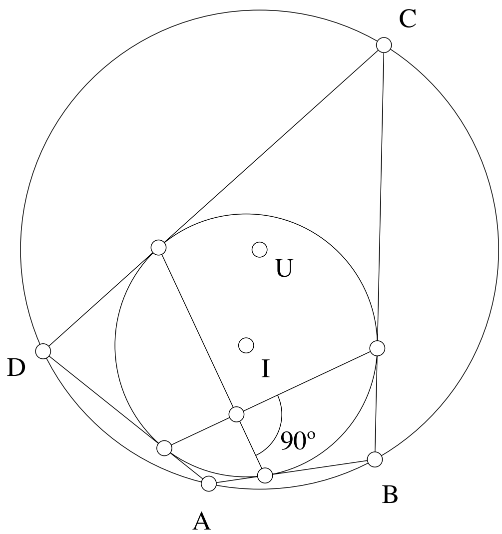
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$$



Die Winkel, unter denen gegenüberliegende Seiten eines Tangentenvierecks vom Inkreismittelpunkt aus gesehen werden, sind supplementär.

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

In einem Sehnen-Tangentenviereck stehen die Berührungssehnen zwischen gegenüberliegenden Berührungspunkten senkrecht aufeinander.



5.4 Additionstheoreme

Summen und Differenzen:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} \\
\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) &= \cos^2\beta - \cos^2\alpha \\
\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) &= \cos^2\beta - \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Doppelte, halbe Winkel:

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2}{\cot\alpha - \tan\alpha} \\
\sin\tfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \\
\cos\tfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \\
\tan\tfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}
\end{aligned}$$

Summen und Differenzen von trigonometrischen Termen:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \\
\tan\alpha \pm \tan\beta &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}
\end{aligned}$$

6 Kombinatorik

6.1 Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)}{k!} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N}$$

Symmetriesatz:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Additionssatz:

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}$$

Additionstheoreme:

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + \ldots + \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+k+1}{k}$$

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{k} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{k-1} + \ldots + \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{0} = \binom{\alpha+\beta}{k} \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$$

6.2 Inklusions-Exklusions-Prinzip

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = &\underbrace{|A_1| + \ldots + |A_n|}_{n \text{ Summanden}} - \Big(\underbrace{|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|}_{\binom{n}{2} \text{ Summanden}}\Big) \\ &+ \Big(\underbrace{|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} + A_{n-1} + A_n|}_{\binom{n}{3} \text{ Summanden}}\Big) - + \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|\end{aligned}$$

6.3 Anzahlformeln

6.3.1 Permutationen

Permutationen ohne Wiederholung: n Objekte auf n Plätze unter Beachtung der Reihenfolge
Urnenmodell: Ziehen aller n numerierten Kugeln ohne Zurücklegen unter Notieren der Reihenfolge.

$$P_n = n!$$

Beispiel: Lexikographische Anordnung der Ziffern $1, 2, 3$: $123, 132, 213, 231, 312, 321$

Permutationen mit Vielfachheiten: n Objekte auf n Plätze unter Beachtung der Reihenfolge, wobei unter den n Objekten m Gruppen zu jeweils k_i gleichen Objekten sind (mit $1 \leq i \leq m$ und $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$)
Urnenmodell: Ziehen von m numerierten Kugeln mit Zurücklegen und mit Notieren der Reihenfolge, wobei die i-te Kugel k_i gezogen wurde.

$$P_{n,w} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Grenzfall: Für $n = m$ und $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$ Übergang zur gewöhnlichen Permutation
Beispiel: 3 weiße und 4 schwarze Kugeln kann man auf $\frac{7!}{3! \cdot 4!}$ Arten in einer Reihe anordnen.

6.3.2 Variationen

Variationen ohne Wiederholung: n Objekte auf k Plätze unter Beachtung der Reihenfolge
Urnenmodell: Ziehen von k aus n verschiedenen Kugeln ohne Zurücklegen und mit Notieren der Reihenfolge

$$V_n^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Grenzfall: Für $n = k$ Übergang zur gewöhnlichen Permutation

Variationen mit Wiederholung: n Objekte auf k Plätze unter Beachtung der Reihenfolge, wobei jedes Objekt öfter vorkommen kann
Urnenmodell: Ziehen von k aus n verschiedenen Kugeln mit Zurücklegen und Notieren der Reihenfolge (geordnete Stichprobe mit Zurücklegen)

$$V_{n,w}^{(k)} = n^k$$

6.3.3 Kombinationen

Kombinationen ohne Wiederholung: n Objekte auf k Plätze ohne Beachtung der Reihenfolge
Urnenmodell: Ziehen von k aus n verschiedenen Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Notieren der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen)

$$C_n^{(k)} = \frac{n!}{k!(n-k)} = \binom{n}{k}$$

Kombinationen mit Wiederholung: k (nicht numerierte) Objekte auf n (numerierte) Fächer verteilt (= Anzahl der Möglichkeiten, k als Summe von n Summanden darzustellen)
Urnenmodell: Ziehen von k aus n verschiedenen Kugeln mit Zurücklegen, ohne Notieren der Reihenfolge

$$C_{n,w}^{(k)} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Beispiel: 4 Kugeln auf 3 Fächer aufgeteilt (bzw. wird für die 4 Kugeln jeweils eines der 3 Fächer aus einer Urne gezogen): $n = 3, k = 4 \Rightarrow C_{3,w}^{(4)} = \binom{6}{2} = 15 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$