1 Matrizen

1.1 Matrixoperationen

- Adjungierte Matrix $A^* = \overline{A}^t$

$$\begin{aligned}(A+B)^* &= A^* + B^* \\ (\alpha A)^* &= \overline{\alpha} A^* \\ (AB)^* &= B^* A^* \\ (A^*)^* &= A\end{aligned}$$

- Spur $\operatorname{tr} A$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr}(B+A) \\ \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(BA) \\ \operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}(A^t) \\ \operatorname{tr}(B^{-1}AB) &= \operatorname{tr}(A), \text{ falls } B \text{ regulär ist}\end{aligned}$$

1.2 Spezielle Matrizen

- Hermitesch (selbstadjungiert): $A^* = A$
  - $\Rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$
  - $\Rightarrow A$ ist *unitär diagonalisierbar*.

  Wenn A hermitesch $\Rightarrow A^t$, $\overline{A}$ und (falls A invertierbar ist) A^{-1} sind hermitesch.

- Unitär (S. 23[1]): Äquivalente Bedingungen
  - $A^*A = I$
  - $\langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$
  - Spalten von A bilden ein ONS.

  Wenn $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: „orthogonal".

- Normal (S. 67): Äquivalente Bedingungen
  - $A^*A = AA^*$
  - Es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$, die aus EV von A besteht.
  - A ist *unitär diagonalisierbar*: Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$, sodass U^*AU eine Diagonalmatrix ist.

  Wenn quadratisch: $|\det A| = 1$ und für alle Eigenwerte gilt $|\lambda| = 1$.

[1] Seitenzahlen beziehen sich auf die entsprechende Stelle im Skriptum „Lineare Algebra 2" von Markus Windisch zur Vorlesung von Clemens Heuberger, Revision 3.0.2.1 vom 1. Juli 2005.

- Schiefhermitesch: $A^* = -A$
  $\Rightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
- Symmetrisch: $A = A^t$
  - hat nur reelle Eigenwerte
  - ist diagonalisierbar
- Schiefsymmetrisch: $A = -A^t$
- Involutorisch: $A^2 = I$
- Idempotent: $A^2 = A$
  $\Rightarrow \sigma(A) \subseteq \{0, 1\}$
- Nilpotent: $\exists p : A^p = 0$
  $\Rightarrow \sigma(A) = \{0\}$
- Positiv definit: $A^* = A$. Zusätzlich äquivalente Bedingungen
  - $\forall x \neq 0 \in \mathbb{K}^n : x^*Ax > 0$
  - $\lambda > 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$
  - $\det A_k > 0$ für alle

    $$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{pmatrix}$$
  - Es gibt eine untere Dreiecksmatrix C mit positiven Diagonalelementen, sodass $A = CC^*$ („Cholesky-Faktorisierung").
- Positiv semi-definit: $A^* = A$. Zusätzlich äquivalente Bedingungen
  - $\forall x \in \mathbb{K}^n : x^*Ax \geq 0$
  - $\lambda \geq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$
  - $\det A_k \geq 0$ für alle $A_k = A(1:k, 1:k)$
  - Es gibt eine Matrix C (womöglich singulär) mit $A = CC^*$.

1.2.1 Zusammenhänge

- A reell und symmetrisch $\Rightarrow A$ ist normal.
- A hermitesch $\Rightarrow A$ ist normal.
- A unitär $\Rightarrow A$ ist normal.
- A hermitesch und reell $\Rightarrow A$ symmetrisch.

2 Normen und Konditionszahl

2.1 Vektornorm (S. 8)

Definition.

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beispiele.

- $\|v\|_2 = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}$: euklidsche Norm
- $\|v\|_p = \sqrt[p]{|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p}$: p-Norm
- $\|v\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$: L_1-Norm
- $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$: Maximumsnorm

2.2 Matrixnorm (S. 9)

Definition.

1. $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (submultiplikativ)

Beispiele.

- $\|A\|_G = \sum_{i,j} |a_{ij}|$: Gesamtnorm
- $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$: Spaltensummennorm
- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$: Zeilensummennorm
- $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$: Frobenius-Norm

2.2.1 Induzierte Operatornorm (S. 10)

$(V, \|\cdot\|)$ und $(W, \|\cdot\|)$ normierte Räume und $F : V \to W$ lineare Abbildung (bzw. Matrix). Dann definiere

$$\|F\|_{V,W} := \sup \left\{ \frac{\|F(x)\|_W}{\|x\|_V} : x \neq 0 \right\}.$$

Eigenschaften von Operatornormen:

1. $\|F\|_{V,W} \geq 0$ und $\|F\|_{V,W} = 0 \Leftrightarrow F = 0$
2. $\|\alpha F\|_{V,W} = |\alpha| \cdot \|F\|_{V,W}$
3. $\|F + H\|_{V,W} \leq \|F\|_{V,W} + \|H\|_{V,W}$
4. $\|F(x)\|_{V,W} \leq \|F\|_{V,W} \cdot \|x\|_V$
5. $\|G \circ F\|_{V,X} \leq \|G\|_{W,X} \cdot \|F\|_{V,W}$

2.3 Konditionszahl (S. 12)

Für A regulär:

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Für A singulär: $\kappa(A) = +\infty$.

Relativer Fehler für $Ax = b$ bzw. $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Bei beidseitiger Störung $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$: Definiere

$$\delta := \max \left\{ \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right\},$$
$$r := \delta \cdot \kappa(A) < 1$$

und A sei regulär. Dann gilt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{2\kappa(A)}{1 - r} \cdot \max \left\{ \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right\}.$$

3 Innere Produkte

Definition.

1. $\langle x, \lambda \cdot y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$
2. $\langle x, y \rangle + z >= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Positiv definit, wenn

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ und } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Standard-Inneres Produkt:

$$\langle x, y \rangle = x^* \cdot y.$$

Durch ein inneres Produkt *induzierte Vektornorm*:

$$\|x\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

3.1 Orthogonalität

$x \perp y \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0.$

Winkel:

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Orthogonalsystem $S \subseteq V$ (V innerer Produktraum):

- $v \neq 0$ für $v \in S$
- $\langle v, w \rangle = 0$ für $v \neq w \in S$

Die Vektoren eines Orthogonalsystems sind linear unabhängig.

Orthonormalsystem: Orthogonalsystem mit $\|v\| = 1$ für $v \in S$ ($\Rightarrow \langle v, w\rangle = 1$).

3.2 Gram-Schmidt-Verfahren

Gegeben: Basis x_i von W.
Gesucht: Orthonormalbasis u_i von W

- $u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$
- for $k = 1 \ldots (n-1)$ do
  - $v_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle u_j, x_{k+1}\rangle\, u_j$
  - $u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$

3.2.1 QR-Zerlegung

$X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit lin. unabh. Spalten. Dann gibt es Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $X = Q \cdot R$ und

- Spalten von Q sind orthogonal.
- R ist obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen.

$$X = (x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{(u_1, \ldots, u_n)}_{=Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \|x_1\| & \langle u_1, x_2\rangle & \langle u_1, x_3\rangle & \cdots \\ 0 & \|v_2\| & \langle u_2, x_3\rangle & \cdots \\ 0 & 0 & \|v_3\| & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{=R}$$

3.3 Lineare Abbildungen in IPR

V, W pos. def. IPR. Dann heißt f^* *adjungiert* zu f, wenn

$$\forall x \in V, y \in W : \langle y, f(x)\rangle_W = \langle f^*(y), x\rangle_V .$$

3.3.1 Unitäre Abbildungen

$\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ orthogonal $\Rightarrow A^* = A^t$ orthogonal. $\Rightarrow$ Spalten und Zeilen bilden ONS.

Unitäre Abbildungen sind längen- und winkeltreu.

Orthogonale Matrizen im $\mathbb{R}^{2\times 2}$: Kompositionen von

- Drehungen:
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
- Spiegelungen:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Dualraum (S. 35)

$V^* := \{f : V \to K, f \text{ linear}\}$

Elemente heißen *lineare Funktionale.*

3.3.3 Projektionen (S. 25)

V Vektorraum mit $V = V_x \oplus V_y$. $x \in V_x$ mit

$$v = \underbrace{x}_{\in V_x} + \underbrace{y}_{\in V_y}$$

heißt *Projektion* von v nach V_x entlang von V_y, bzw.

V pos. def. IPR, W Teilraum von V. $\overline{x}$ heißt Projektion von x auf W, falls

- $\overline{x} \in W$,
- $x - \overline{x} \in W^\perp$.

Projektionsmatrix:

$$P = (X, Y) \cdot \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (X, Y)^{-1},$$

wobei $dim(V_x) = r$, X: Basisvektoren von V_x, Y: Basisvektoren von V_y.

Sei $P : V \to V$ linear mit $\mathrm{Im}(P) = W$. Dann ist P genau dann gleich der Projektionsabbildung P_W, wenn

- $P^2 = P$ (idempotent),
- $P^* = P$ (selbstadjungiert).

Für P_W gilt

$$P_W(x) = A(A^*A)^{-1}A^*x,$$

wobei die Spalten von A eine Basis von W darstellen.

Alle $w \in W$ werden auf sich selbst projiziert, d.h.

$$Pw = w \Leftrightarrow (P - I)w = 0.$$

Orthogonales Komplement von $M \subseteq V$:

$$M^\perp := \{v \in V \mid \forall m \in M : v \perp m\}$$

Es gilt $(M^\perp)^\perp = M$ und $V = M \oplus M^\perp$.

3.3.4 Orthogonale Distanz

V positiv definiter IPR, M Unterraum von V, $b \in V$. Dann gilt

$$d(b, M) := \min_{m \in M} \|m - b\|^2 = \|P_M b - b\|_2^2.$$

3.3.5 Spiegelungen (S. 33)

- $S^2 = I$ (involutorisch)
- S unitär

Für S_M gilt

$$S_M = 2 \cdot P_M - I.$$

Alle $m \in M$ werden auf sich selbst gespiegelt, d.h.

$$Sm = m \Leftrightarrow (P - I)m = 0.$$

4 Lineare Gleichungssysteme und QR-Zerlegung

4.1 Überbestimmte Gleichungssysteme (S. 38)

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, b \in \mathbb{K}^m, m > n$. $x_0 \in \mathbb{K}^n$ heißt Lösung des überbestimmten Gleichungssystem $Ax = b$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate, wenn

$$\|Ax_0 - b\|_2 = \min(\|Ax - b\|_2 : x \in \mathbb{K}^n).$$

1. *Normalgleichungen* für „least-squares-solution“ x_0:

   $$(A^*A)x_0 = A^*b.$$

2. *via QR-Zerlegung*: $\operatorname{rg} A = n$

   $$R_1 x = c,$$

   wobei $A = QR$ (volle QR-Zerlegung), $R_1 = R(1:n, :) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $c = (Q^*b)(1:n) \in \mathbb{K}^n$.

4.2 Unterbestimmte Gleichungssysteme (S. 40)

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, b \in \mathbb{K}^m, m < n, \operatorname{rg} A = m$. Volle QR-Zerlegung $A^* = QR$, $R_1 = R(1:m, :)$. Kürzeste Lösung von $Ax = b$, d.h.

$$\|x_0\| = \min_x \{\|x\| : Ax = b\},$$

ist

$$x = Q \cdot (y_1, 0)^t,$$

wobei $y_1 \in \mathbb{K}^m$ die eindeutige Lösung von

$$R_1^* y_1 = b$$

ist.

4.3 QR-Zerlegung über Householder-Transformation (S. 40)

Gegeben: $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
Gesucht: $Q \in \mathbb{K}^{m \times m}, R \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $A = QR, Q^*Q = I_m$ und R obere Dreiecksmatrix.

- $Q = I_m, R = A$
- for $k = 1 : n$ do
  - $N = \|R(k:m, k)\|_2$
  - $w = \frac{1}{\sqrt{2N(N + |r_{kk}|)}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{kk} + N\frac{r_{kk}}{|r_{kk}|} \\ r_{k+1,k} \\ r_{mk} \end{pmatrix}$
  - $H = I_m - 2ww^*$
  - $R = HR$
  - $Q = QH$

5 Eigenwerte

Definition. $F: V \to V$ Endomorphismus (bzw. Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$), V ein K-Vektorraum, $\lambda \in K$. λ heißt *Eigenwert* von F, falls es ein $x \neq 0, x \in V$ gibt, sodass

$$F(x) = \lambda x.$$

Ein solches x heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ.

$$\sigma(F) := \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ Eigenwert von } F\}$$

heißt *Spektrum* von F.

Eigenraum von F bzgl. λ:

$$V_\lambda = V_\lambda(F) := \{x \in V \mid F(x) = \lambda x\}.$$

Es gilt

- $V_\lambda = \operatorname{Ker}(F - \lambda \operatorname{id})$.
- $\lambda \in \sigma(F) \Leftrightarrow (F - \lambda \operatorname{id})$ ist singulär, d.h. $\operatorname{Ker} \neq \{0\}$.

5.1 Berechnung

Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_F(t) = \det(F - t \operatorname{id}).$$

Geometrische Vielfachheit von λ:

$$\rho_\lambda = \rho_F(\lambda) := \dim_K V_\lambda(F).$$

Algebraische Vielfachheit $\mu_F(\lambda)$: Vielfachheit von λ als Nullstelle von $p_F(t)$.

Es gilt

$$1 \leq \rho_F(\lambda) \leq \mu_F(\lambda).$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

5.2 Eigenschaften von Eigenwerten (S. 50)

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}, \lambda \in \sigma(A)$.

1. $\lambda \in \sigma(A^t)$
2. A regulär $\Rightarrow 0 \notin \sigma(A), \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1})$
3. $\lambda^m \in \sigma(A^m)$
4. $\lambda \in \sigma(T^{-1}AT)$ mit EV $T^{-1}x$ (T regulär).
5. falls $A^2 = A$: $\sigma(A) \subseteq \{0, 1\}$
6. falls $\exists p : A^p = 0$ (nilpotent): $\sigma(A) = \{0\}$
7. $c\lambda \in \sigma(cA)$
8. $\lambda + c \in \sigma(A + cI)$

5.3 Diagonalisierbarkeit (S. 52)

$F: V \to V$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. F ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis von V, bezüglich derer F als Diagonalmatrix dargestellt werden kann.
2. Es gibt eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von F besteht.
3. $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$.
4. $\rho(\lambda) = \mu(\lambda)$ für alle $\lambda \in \sigma(F)$.

5.3.1 Berechnung

- Eigenwerte berechnen und überprüfen, ob $\rho(\lambda) = \mu(\lambda)$
- Eigenvektoren in Spalten von T schreiben
- $T^{-1}AT = D \ldots$ Dreiecksmatrix

5.3.2 Schurform (S. 67)

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Schurform von A ist eine Matrix $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$, sodass P obere Dreiecksmatrix ist und die Diagonalelemente den Eigenwerten von A entsprechen.

Für jedes $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt es eine unitäre Matrix U, sodass

$$U^* A U = P.$$

Bestimmung:

1. Bestimme EW und normierten EV
2. Basisergänzungssatz & Gram-Schmidt: liefert Matrix U_1
3. Bestimmung von A_2, iterativ fortsetzen

5.4 Klassifizierung von Kegelschnitten (S. 70)

$$\begin{aligned} F(x,y) &= a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ &\quad + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00} \\ &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{10} \\ a_{11} & a_{02} & a_{01} \\ a_{10} & a_{01} & a_{00} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Setze

$$A = \begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & a_{02} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{01} \end{pmatrix}$$

(siehe Tabelle 1)

rg A	det A	tr A det B	rg $B=3$	rg $B=2$	rg $B=1$
2	<0		Hyperbel	2 schneidende Geraden	–
	>0	<0	Ellipse	1 Punkt	
		>0	$\emptyset$		
1			Parabel	2 parallele Geraden oder leer	1 Gerade (doppelt)

Tabelle 1: Fallunterscheidungen bei Kegelschnitten

5.4.1 Hauptachsentransformation

Gegeben: Quadrik

$$p(x) = x^t A x + \alpha^t x + \beta = 0.$$

Transformation auf Normalform:

- Diagonalisieren von A: $\exists U$ unitär, sodass

  $$U^t A U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D,$$

  wobei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \sigma(A)$ die Eigenwerte von A sind.

- Transformation:

  $$x = Uy.$$

  Somit

  $$p(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha_i} y_i + \beta = 0.$$

- Translation:

  $$z_i = \begin{cases} y_i - \frac{\tilde{\alpha_i}}{2\lambda_i} & \lambda_i \neq 0 \\ y_i & \lambda_i = 0 \end{cases}$$

  (siehe Übungsbeispiel 61)

5.5 Jordansche Normalform (S. 55)

Definition. $F : V \to V$ Endomorphismus mit $\sigma_i \in \sigma(F)$.

- $H_i^k := \{x \in V \mid x \in \operatorname{Ker}(F - \lambda_i I)^k\}$ heißt Hauptraum zu EW λ_i der Stufe $k \in \mathbb{N}$.

- $x \in H_i^k$ mit $x \neq 0$ heißt verallgemeinerter Eigenvektor.

- $H_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_i^k = \{x \in V \mid x \in \operatorname{Ker}(F - \lambda_i I)^k$ für ein $k \in \mathbb{N}\}$

  Berechnung:

1. Eigenwerte und -vektoren bestimmen

2. Basen der Haupträume bestimmen (wenn nur Jordan-Matrix erwünscht: Dimensionen reichen!)

3. Wenn nur Jordan-Matrix erwünscht: über *Weyrsche Charakteristik*

   (a) „Hauptraumvergrößerungen“:

   $$\alpha_1 = \dim H^1$$
   $$\alpha_j = \dim H^j - \dim H^{j-1}$$

   (b) Kettenlängen:

   $$\begin{aligned} l_r &= \alpha_r \\ l_{r-1} &= \alpha_{r-1} - l_r = \alpha_{r-1} - \alpha_r \\ &\vdots \\ l_j &= \alpha_j - \alpha_{j+1} \\ &\vdots \\ l_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned}$$

4. Wenn Transformationsmatrix auch erwünscht: Kettenbasen berechnen

   (a) Wähle Basisvektor v in größtem (noch nicht „erschöpftem“) Hauptraum, der linear unabhängig zu Basisvektoren des darunterliegenden Hauptraumes ist.

   (b) Rechne die Kette mittels $(A - \lambda) \cdot v$ zurück.

   (c) Wiederhole das Verfahren, bis alle Haupträume „erschöpft“ sind, d.h. die Ketten alle Basisvektoren erzeugen.

   (d) Kettenlängen direkt ablesen

   (e) Die Spalten der Transformationsmatrix sind die Kettenbasisvektoren. (In entsprechender Reihenfolge zur Jordan-Matrix, und in aufsteigender Reihenfolge der Haupträume, d.h. Basis von H^1 vor H^2.)

   $$T = \begin{pmatrix} k_1^1 & k_1^2 & \dots & k_1^{l_1} & \dots & k_r^1 & \dots & k_r^{l_r} \end{pmatrix}$$

5. Jordan-Matrix aufstellen:

$$J = \begin{pmatrix} J_{r_{1,1}}(\lambda_1) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_{r_{1,\rho(\lambda_1)}}(\lambda_1) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{r_{m,\rho(\lambda_m)}}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

5.5.1 Matrixpotenzen

$$A = TJT^{-1}$$
$$A^k = TJ^kT^{-1}$$
$$J^k = \begin{pmatrix} J_{r_1}^k(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{r_m}^k(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

Potenz eines Jordan-Blocks:

$$(J_r^k(\lambda))_{ij} = \binom{k}{j-i}\lambda^{k-(j-i)}$$

5.5.2 Matrixpolynome

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $f(t)\sum_{k=0}^m c_k t^k$ ein Polynom. Dann ist

$$f(A) = T\begin{pmatrix} f(J_{r_1}(\lambda_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(J_{r_m}(\lambda_p)) \end{pmatrix}T^{-1}$$

und

$$f(J_l(\lambda))_{ij} = \frac{f(\lambda)^{(j-i)}}{(j-i)!} \text{ für } i \leq j, \text{ sonst } = 0.$$

Satz von *Cayley-Hamilton*: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $p_A(t)$ das zugehörige charakteristische Polynom. Dann gilt

$$p_A(A) = 0.$$

5.5.3 Asymptotisches Verhalten diskreter Systeme (S. 63)

Beschreibung von Prozess (Zustandsänderung) durch Matrix. Frage: Was passiert nach „unendlicher" Zeit?

Definition. Spektralradius:

$$s(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

1. Es sind folgende Aussagen äquivalent:
   (a) $s(A) < 1$.
   (b) Für alle x gilt $\lim_{n\to\infty} A^n x = 0$.
   (c) $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$.
2. Es sind folgende Aussagen äquivalent:
   (a) $s(A) \leq 1$ und für alle $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = 1$ gilt $\rho(\lambda) = \mu(\lambda)$.
   (b) Für alle x ist $A^n x$ beschränkt.
   (c) $\|A^n\|$ ist beschränkt.
3. Es sind folgende Aussagen äquivalent:
   (a) $s(A) > 1$ oder es gibt einen Eigenwert λ mit $|\lambda| = 1$ und $\rho(\lambda) < \mu(\lambda)$..
   (b) Es gibt ein x, sodass $A^n x$ unbeschränkt ist.
   (c) $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = \infty$.

5.5.4 Lineare Rekursionen (S. 64)

1. Charakteristische Gleichung: ersetze x_{n+k} in Rekursionsgleichung durch λ_k.
2. Falls Störglieder vorhanden: Eliminieren durch (ggf. mehrmalige) Indexverschiebung.
3. Lösen der charakteristischen Gleichung.
4. Unbestimmter Ansatz: Linearkombination der Lösungen der charakteristischen Gleichungen, bei Vielfachheiten mit entsprechenden Potenzen von n multiplizieren.
5. Einsetzen der Anfangswerte.
6. Lösen des linearen Gleichungssystems.

6 Eigenwertprobleme spezieller Matrizen

6.1 Hermitesche Matrizen

$A^* = A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

- Hermitesch $\Rightarrow$ normal $\Rightarrow \exists U$ unitär, D Diagonalmatrix, sodass $A = U^*DU$.
- Eigenwerte sind reell.

Definition. Rayleigh-Quotient:

$$r_A(x) := \frac{x^*Ax}{x^*x}$$

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \max_{x\in\mathbb{K}^n, x\neq 0} r_A(x) = \max_{x\in\mathbb{K}^n, x\neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} \\ &= \max_{x\in\mathbb{K}^n, \|x\|=1} x^*Ax \\ \lambda_n &= \min_{x\in\mathbb{K}^n, x\neq 0} r_A(x) = \min_{x\in\mathbb{K}^n, \|x\|=1} x^*Ax.\end{aligned}$$

Courrant-Fischer (S. 74): Verallgemeinerung auf restliche Eigenwerte

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \min_{V\subseteq\mathbb{K}^n, \dim V = n-i+1} \max_{x\in V, \|x\|=1} x^*Ax \\ &= \max_{V\subseteq\mathbb{K}^n, \dim V = i} \min_{x\in V, \|x\|=1} x^*Ax.\end{aligned}$$

Schachtelsatz für hermitesche Matrizen:
$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A^* = A$ und Eigenwerten $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

$$B = \begin{pmatrix} A & c \\ c^* & \alpha \end{pmatrix}$$

mit Eigenvektoren $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_n$.
Dann gilt

$$\beta_1 \geq \lambda_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \beta_{n+1}.$$

6.2 Positiv definite Matrizen

6.2.1 Charakterisierung

Sei $A^* = A$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- A ist positiv definit, d.h.

$$\forall x \neq 0 \in \mathbb{K}^n : x^*Ax > 0.$$

- $\lambda > 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$
- $\det A_k > 0$ für alle

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

- Es gibt eine untere Dreiecksmatrix C mit positiven Diagonalelementen, sodass $A = CC^*$ („Cholesky-Faktorisierung“).

6.2.2 Cholesky-Faktorisierung

Gegeben: $A = A^*$ Gesucht: C untere Dreicksmatrix mit $A = CC^*$ oder Beweis, dass A nicht positiv definit ist.

- for $j = 1 : n$ do
  - $d := a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} |c_{jk}|^2$
  - if $d \leq 0$ then
    - return (A ist nicht positiv definit)
  - $c_{jj} := \sqrt{d}$
  - for $i = j+1 : n$ do
    - $c_{ij} := \frac{1}{c_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik}\overline{c_{jk}} \right)$

7 Lokalisierung von Eigenwerten

Definition.

$$\overline{S_i} := \overline{S}\left(a_{ii}, \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right)$$

heißt *Gershgorin-Kreis.*

Satz von *Gershgorin*:

1. $\forall \lambda \in \sigma(A) : \exists 1 \leq i \leq n$ sodass $\lambda \in \overline{S_i}$
2. $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $\bigcup_{i\in I} \overline{S_i} \cap \bigcup_{i\notin I} \overline{S_i} = \emptyset$. Dann liegen genau $|I|$ Eigenwerte in $\bigcup_{i\in I} \overline{S_i}$.

   Punktweise Überschneidungen stören nicht, da das charakteristische Polynom von A und somit seine Nullstellen stetige Funktionen sind.

8 Numerik von Eigenwerten

8.1 Sensitivitätsanalyse

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ und sei $\mu \in \sigma(A + \Delta A)$. Dann gilt

$$\min_{1\le i\le n} |\mu - \lambda_i| \le \kappa(T) \cdot \|\Delta A\|_p$$

mit

$$A = T \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot T^{-1}$$
$$\kappa(T) = \|T\|_p \cdot \|T^{-1}\|_p.$$

Wenn A normal:

$$\min_{1\le i\le n} |\mu - \lambda_i| \le \kappa(U) \cdot \|\Delta A\|_p \le \|\Delta A\|_p.$$

8.2 Eigenwert-Algorithmen

- Betragsgrößter Eigenwert: Potenzmethode (S. 93)
- Betragskleinster Eigenwert: Inverse Iteration (S. 95)
- Berechnung eines beliebigen Eigenwerts: Wende Algorithmus für betragskleinsten EW auf $A - \sigma I$ an (σ: Schätzung)
- Simultane Iteration (S. 97)
- QR-Verfahren (S. 99)
- QR-Verfahren in Hessenbergform (S. 101)
- QR-Verfahren mit Shifts (S. 105)

8.3 Eigenwertprobleme reeller, symmetrischer Matrizen

$$A^t = A$$
$$H = Q^t A Q \text{ (Hessenbergmatrix)}$$
$$H^t = Q^t A^t Q = Q^t A Q = H,$$

H ist also Tridiagonalmatrix, d.h.

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & & \\ & & & & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

8.3.1 Sturm'sche Kette

Für $p_k(x) := \det(A_k - xI)$ gilt

$$p_0(x) = 1$$
$$p_1(x) = a_1 - x$$
$$p_k(x) = (a_k - x)p_{k-1}(x) - b_{k-1}^2 p_{k-2}(x).$$

Die Anzahl der negativen Eigenwerte der Matrix A (in Tridiagonalform und *irreduzibel*, d.h. $b_k \neq 0$) entspricht der Anzahl der Vorzeichenwechsel von $1, \det(A_1), \det(A_2), \dots, \det(A_n)$, wobei ein Vorzeichenwechsel gezählt wird

- von positiv oder 0 auf negativ,
- von negativ oder 0 auf positiv.

Die Anzahl der Eigenwerte im Intervall $[a, b]$ entspricht der Differenz der Anzahl der VZW in der Sturm'schen Kette von b und der Anzahl der VZW in der Sturm'schen Kette von a.

9 Nichtnegative Matrizen

Definition. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt *nichtnegativ*, wenn $a_{ij} \ge 0$ für alle $1 \le i, j \le n$, schreibe $A \ge 0$.

A heißt *positiv*, wenn $a_{ij} > 0$, $A > 0$.

Es gilt

$$A > 0, x \ge 0 \Rightarrow Ax \ge 0,$$
$$A > 0, x \ge 0, x \neq 0 \Rightarrow Ax > 0.$$

9.1 Reduzible Matrizen (S. 81)

Definition. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *reduzibel*, falls es eine Permutationsmatrix P gibt, sodass

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

für quadratische Matrizen B_{11} und B_{22} gilt.

Sei G ein Di-Graph mit Adjazenzmatrix A. Dann gilt: A reduzibel $\Leftrightarrow$ G ist stark zusammenhängend.

9.2 Satz von Perron-Frobenius (S. 82)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \ge 0$, A irreduzibel. Dann gibt es $\lambda_0 > 0$, $x_0 > 0$ mit

1. $Ax_0 = \lambda_0 x_0$
2. $|\lambda| \le |\lambda_0|$ für alle anderen Eigenwerte (falls $A > 0$ sogar „$<$“)
3. $\mu(\lambda_0) = \rho(\lambda_0) = 1$

9.3 Markov-Ketten

Beschreibe Prozess durch Anfangszustand und Übergangswahrscheinlichkeit („memoryless“: keine weiter vorangegangenen Zustände ausschlaggebend).

$$\begin{aligned} p_j(0) &= \text{W. zum ZP 0 in Zustand } j \text{ zu sein} \\ (P(t))_j &= \text{W. zum ZP } t \text{ von } i \text{ auf } j \text{ zu wechseln} \\ p_j(t) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(t-1) \cdot (P(t))_{ij} \end{aligned}$$

Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned} p(t) = P(t) \cdot p(t-1) = P(t)P(t-1)p(t-2) = \\ = \ldots = P(t)P(t-1)\cdots P(1)p(0) \end{aligned}$$

Markov-Kette heißt *harmonisch*, wenn $P(t) = P$ für alle t; $\Rightarrow$ 1 muss Eigenwert von P^t sein.

Definition. Markov-Kette heißt *ergodisch*, wenn P irreduzibel und azyklisch ist.

Eine ergodische Markov-Kette besitzt eine endliche Grenzverteilung (= stationäre Verteilung) π. π ist ein Vielfaches des EV zu EW 1 von P^t, sodass

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1.$$