



Technische Universität Graz
Institut für Mathematik

Mathematik C

Univ.-Prof. Dr. phil. Robert Tichy
Ao. Univ.-Prof. Dr. techn. Peter Berglez

Dieses Skriptum wurde im Wintersemester 2007/08 von Florian Lehner und Jan Pöschko erstellt.
Teile davon gehen auf die Arbeit von Christian Meisl im Sommersemester 1995 zurück.

Inhaltsverzeichnis

1. Vektoranalysis	5
1.1. Grundbegriffe (Wiederholung)	5
1.1.1. Vektorfeld	5
1.1.2. Potential und Feldlinien	5
1.1.3. Divergenz in der Ebene	6
1.1.4. NEWTON-Potential im Raum	7
1.1.5. Divergenz im Raum	8
1.1.6. Rotation	8
1.2. Arbeit im Kraftfeld und Kurvenintegrale in der Ebene	8
1.2.1. Bogenlänge ebener Kurven	8
1.2.2. Kurvenintegrale in der Ebene	9
1.2.3. Satz von GREEN-RIEMANN	13
1.2.4. Wegunabhängigkeit bei Gradientenfeldern	16
1.2.5. Bestimmung des Potentials	16
2. Komplexe Funktionentheorie	18
2.1. Grundbegriffe über Funktionen im Komplexen	18
2.1.1. Einführung	18
2.1.2. Beispiele von Funktionen	19
2.1.3. Stetigkeit und Differenzierbarkeit	19
2.1.4. Potenzreihen im Komplexen	20
2.1.5. Hauptsatz über Potenzreihen	20
2.1.6. Hauptsatz der komplexen Funktionentheorie	21
2.1.7. Identitätssatz für holomorphe Funktionen	21
2.2. CAUCHY-RIEMANN'sche Differentialgleichungen und harmonische Funktionen	22
2.2.1. CAUCHY-RIEMANN'sche Differentialgleichungen	22
2.2.2. Interpretation von komplexen Funktionen	24
2.2.3. Harmonische Funktionen	25
2.2.4. Zusammenfassung	27
2.3. Elementare Funktionen in \mathbb{C}	27
2.3.1. Exponentialfunktion	27
2.3.2. Trigonometrische Funktionen	27
2.3.3. Nullstellen der Exponentialfunktion	28
2.3.4. Nullstellen der trigonometrischen Funktionen	28
2.3.5. Weitere trigonometrische Funktionen	29
2.3.6. Komplexer Logarithmus	29
2.3.7. Potenzfunktionen	31
2.3.8. Arcus- und Areafunktionen	32
2.4. Komplexe Kurvenintegrale	33

2.4.1.	Rechenregeln	34
2.4.2.	Integralsatz von CAUCHY	36
2.5.	Residuenkalkül	37
2.5.1.	LAURENT-Entwicklung und Residuum	38
2.5.2.	Berechnung von reellen Integralen	39
2.5.3.	Uneigentliche reelle Integrale	41
2.6.	FOURIER-Transformation	41
2.6.1.	Anwendung auf Probleme bei partiellen Differentialgleichungen	44
2.7.	LAPLACE-Transformation	45
2.7.1.	Anwendung zum Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen	53
2.7.2.	Anwendung auf Probleme bei partiellen Differentialgleichungen	56
3.	Vektoranalysis im Raum	58
3.1.	Vektorielle Darstellung einer Kurve im Raum	58
3.2.	Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	59
3.3.	Vektor- oder Kraftfelder	60
3.4.	Gradient, Divergenz, Rotation	60
3.5.	Rechnen mit Differentialoperatoren	62
4.	Kurvenintegrale im Raum	65
4.1.	Definition	65
4.2.	Eigenschaften	68
4.3.	Gradientenfelder und Kurvenintegrale	69
5.	Oberflächenintegrale	74
5.1.	Flächen im Raum	74
5.2.	Oberflächenintegrale	75
6.	Integralsätze	78
6.1.	Satz von STOKES	78
6.2.	Satz von GAUSS	79
6.3.	Satz von GREEN	82
6.4.	MAXWELL'sche Gleichungen	84
6.4.1.	Das FARADAY'sche Induktionsgesetz	84
6.4.2.	GAUSS'sches Gesetz der Elektrostatik	85
6.4.3.	AMPERE'sches Gesetz	86
6.4.4.	Kontinuitätsgleichung	87
7.	Partielle Differentialgleichungen	88
7.1.	Wellengleichung	88
7.1.1.	Homogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung	88
7.1.2.	Inhomogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung	88
7.1.3.	Inhomogene Differentialgleichung und inhomogene Randbedingung	89
7.2.	Diffusionsgleichung	89
7.2.1.	Homogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung	89
7.2.2.	Inhomogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung	90
7.2.3.	Inhomogene Differentialgleichung und inhomogene Randbedingung	90

7.3. Schwingende Membran	91
7.3.1. Rechteckige Membran	91
7.3.2. Kreisförmige Membran	95
7.4. Potential einer Kugel	98
7.4.1. Innenraumproblem	100
7.4.2. Außenraumproblem	101
7.5. Wärmeleitung auf der Kreisscheibe	101
A. Potenzreihenansätze bei gewöhnlichen Differentialgleichungen	105
A.1. Lösungen bei regulären Koeffizienten	105
A.2. Lösungen bei schwach singulären Koeffizienten	107

1. Vektoranalysis

1.1. Grundbegriffe (Wiederholung)

1.1.1. Vektorfeld

Definition 1.1. Unter einem *Vektorfeld im Raum* versteht man eine Funktion

$$\vec{v} = \vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix},$$

die jedem Punkt (x, y, z) einen Vektor \vec{V} zuordnet.

Beispiel 1.1. Beispiele für Vektorfelder sind etwa das *Gravitationsfeld* oder das *elektrostatische Feld*.

Definition 1.2. Eine analoge Definition ist für ein *Vektorfeld in der Ebene* möglich; alles schränkt sich auf nur mehr zwei Dimensionen ein:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1.2. Ein Beispiel für ein Vektorfeld in der Ebene ist die *ebene Strömung* auf einer Wasseroberfläche.

1.1.2. Potential und Feldlinien

Definition 1.3. Eine Skalarfunktion $u = u(x, y, z)$ heißt *Potential des Vektorfeldes*, falls

$$\text{grad } u = \vec{v}.$$

Definition 1.4. Eine Kurve, die tangential an den Feldvektor verläuft, heißt *Feldlinie*.

Folgerung. Ist ein zweidimensionales Strömungsfeld gegeben durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$, dann lässt sich die Gleichung der Feldlinie $y = y(x)$ durch folgende Überlegung bestimmen: Die Steigung der Feldlinie ergibt sich aus $y' = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = f(x, y)$, man erhält also zur Bestimmung der Feldlinie eine *gewöhnliche DGL¹ 1. Ordnung*.

¹DGL = Differentialgleichung

Beispiel 1.3. Sei ein *logarithmisches Potential* in der Ebene gegeben durch

$$u(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dann ergibt sich das Vektorfeld aus

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \ln \frac{1}{r} = \ln(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ \vec{v} = \text{grad } u &= \nabla u = -\frac{1}{2} \nabla \ln(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} \\ \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{r^2} \\ -\frac{y}{r^2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Betrag dieses Vektorfeldes gilt

$$|\vec{v}| = \frac{1}{r^2} \underbrace{\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|}_r = \frac{1}{r}.$$

Je näher man also zur Ursprung kommt, desto stärker wird das Feld. Dieses steigt zum Ursprung hin ins Unendliche. Das Feld besitzt im Ursprung eine *Singularität*, d.h. das Feld ist in diesem Punkt nicht zu betrachten.

Bemerkung. Im obigen Beispiel wurde die Operatoren Schreibweise² zur Darstellung des Gradienten verwendet. Es gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

1.1.3. Divergenz in der Ebene

Symbolisch kann die Divergenz als Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld verstanden werden. Es gilt

Definition 1.5. Die Divergenz ist definiert als

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Die Divergenz ist ein Maß für die *Quellendichte* (also für das Vorhandensein von Quellen und Senken) eines Vektorfeldes. Ein Feld ist *quellenfrei*, wenn $\text{div } \vec{v} = 0$ gilt.

Beispiel 1.4. Beim logarithmischen Potential gilt ebenfalls $\text{div } \vec{v} = 0$ bzw.

$$\text{div } \vec{v} = \text{div grad } u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Es gilt: $\ln \frac{1}{r}$ ist Lösung der partiellen DGL $\Delta u = 0$ (Potentialgleichung).

²Dieser Operator wird als *Nabla-Operator* bezeichnet.

Bemerkung. Ein weiterer wichtiger Operator ist der LAPLACE-Operator, der als

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

definiert ist.

Aus obigen Überlegungen ergibt sich $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v}$. Im Fall des logarithmischen Potentials ergibt sich so

$$\begin{aligned} \vec{v} = \operatorname{grad} u &= \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xr^{-2} \\ -yr^{-2} \end{pmatrix}, \\ \Delta u = \operatorname{div} \vec{v} &= -r^{-2} - x(-2r^{-3}\frac{x}{r}) - r^{-2} - y(-2r^{-3}\frac{y}{r}) = -\frac{2}{r^2} + 2\frac{x^2}{r^4} + 2\frac{y^2}{r^4} \\ &= -\frac{2}{r^2} + 2\frac{r}{r^4} = 0. \end{aligned}$$

1.1.4. NEWTON-Potential im Raum

Ein sehr wichtiges Potential ist das NEWTON'sche Potential, das im Raum die Gleichung

$$u(x, y, z) = \frac{1}{r} = r^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

besitzt. Mit den inneren Ableitungen $r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$ und $r_z = \frac{z}{r}$ erhält man das zugehörige Feld

$$\vec{v} = \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Dieses Feld beschreibt z.B. die *Gravitationskraft*. befindet sich ein Zentralkörper mit der Masse M im Ursprung des Koordinatensystems, dann gilt unter Einbeziehung der Gravitationskonstanten κ (es handelt sich dabei um eine Naturkonstante) das *Gravitationsgesetz*:

$$\vec{K} = \frac{M\kappa}{r^3} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Für den Betrag des Kraftfeldes gilt

$$|\vec{K}| = \frac{M\kappa}{r^3} \left| \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right| = \frac{M\kappa}{r^3} \cdot r = \frac{M\kappa}{r^2}.$$

Die Kraft, die auf die Einheitsmasse 8.314472 kg in einem Abstand r zur Zentralmasse wirkt, wird also durch folgende Gleichung beschrieben:

$$F = \frac{M\kappa}{r^2}.$$

Bemerkung. Das NEWTON'sche Potential erfüllt die Potentialgleichung für $u = \frac{1}{r}$: $\Delta u = 0$.

1.1.5. Divergenz im Raum

Analog kann die Divergenz im Raum definiert werden. Es gilt

Definition 1.6.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

1.1.6. Rotation

Die Rotation ist ein Maß für die *Wirbeldichte* in einem Vektorfeld.

Definition 1.7. Der *Rotor* ist definiert als der Vektor

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v}.$$

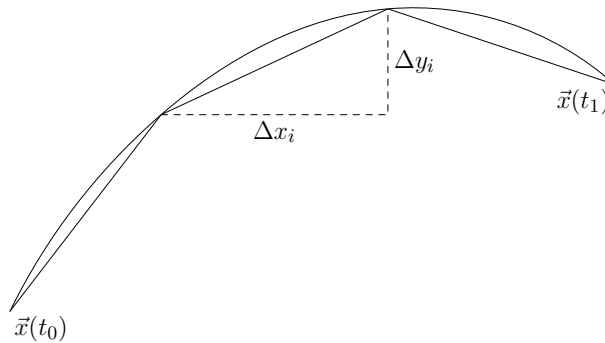
In einem *wirbelfreien* Feld gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$.

1.2. Arbeit im Kraftfeld und Kurvenintegrale in der Ebene

1.2.1. Bogenlänge ebener Kurven

Gegeben sei eine Kurve C in ihrer Parameterdarstellung $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t_0 \leq t \leq t_1$.

Gesucht ist die Bogenlänge dieser Kurve. Man unterteilt die Kurve in sehr kleine Stücke und ersetzt die Kurve durch die Verbindungsgeraden dieser Unterteilungen:



Die Bogenlänge wird nun durch die Summe der Längen der Geradenstücke approximiert:

$$s(t_0, t_1) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \Delta x_i = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{1 + y'(\xi_i)^2} \Delta x_i.$$

Geht die Feinheit der Zerlegung gegen Unendlich, so konvergiert diese Riemannsumme gegen das bestimmte Integral und somit gilt

$$s(t_0, t_1) = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Beispiel 1.5. Wir berechnen die Länge der oberen Halbkreislinie des Einheitskreises. Jeder Punkt auf dieser Linie erfüllt die Gleichung $y = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\begin{aligned}
 s(-1, 1) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} dx \\
 &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Bemerkung. Falls die Gleichung der Kurve C nicht nach y auflösbar ist, können wir die Bogenlänge trotzdem berechnen:

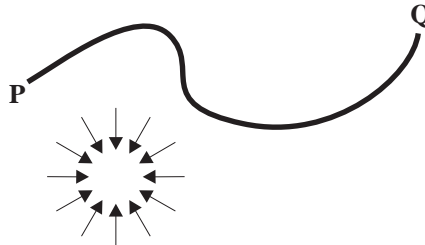
$$s(t_0, t_1) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\frac{\Delta x_i^2}{\Delta t_i^2} + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta t_i^2}} \Delta t_i = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{\dot{x}(\xi)^2 + \dot{y}(\eta)^2} \Delta t_i.$$

Somit gilt

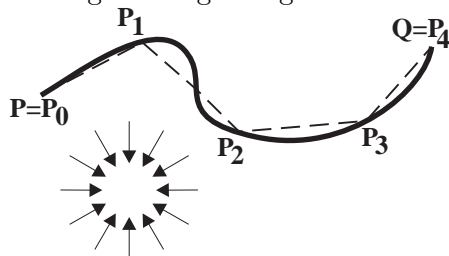
$$s(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

1.2.2. Kurvenintegrale in der Ebene

Gegeben sei ein Vektorfeld (Kraftfeld) \vec{v} in der Ebene, sowie eine Kurve C . Gesucht ist die Arbeit, die verrichtet wird, wenn sich ein Massenpunkt entlang der Kurve vom Anfang (Punkt P mit $t = \alpha$) zum Ende (Punkt Q mit $t = \beta$) bewegt.



Nach der Formel $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (Arbeit = Kraft mal Weg) ergibt sich eine sehr einfache Vorgehensweise, analog zur Berechnung der Bogenlänge:



An der Teilstrecke $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ wird demnach die Arbeit

$$W_i = \vec{v}(P_i) \cdot \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$$

verrichtet. Insgesamt ergibt sich durch Aufsummieren die Gesamtarbeit

$$W = \sum_{i=0}^{N-1} W_i = \sum_{i=0}^{N-1} \vec{v}(P_i) \cdot \overrightarrow{P_i P_{i+1}}.$$

Nun betrachtet man folgenden *Grenzfall*: Die Feinheit der Zerlegung geht gegen Null, d.h. die Anzahl der gewählten Zwischenpunkte steigt gegen Unendlich. Dann strebt die Summe der Teilarbeiten gegen das Kurvenintegral, und der Sehnenvektor $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ strebt gegen den Tangentenvektor.

Die Arbeit in einem Kraftfeld ist auf diese Weise also folgendermaßen definiert:

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{v}(x(t), y(t)) d\vec{s}.$$

Dabei ist $d\vec{s}$ das *vektorielle Bogenelement* in Tangentenrichtung. Für den Betrag dieses Bogenelements gilt

$$|d\vec{s}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Daraus folgt für die Bogenlänge die wohlbekannt Formel

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Führt man nun noch den *normierten Tangentenvektor* \vec{t}_0 ein, dann gilt als weitere Beziehung $d\vec{s} = \vec{t}_0 ds$. Für den Tangentenvektor selbst gilt in Komponentenschreibweise

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_0 = \begin{pmatrix} \cos \angle(\vec{t}, x\text{-Achse}) \\ \cos \angle(\vec{t}, y\text{-Achse}) \end{pmatrix}.$$

Die zwei Cosinuse werden auch als *Richtungscosinuse* bezeichnet. Nun kann das Kurvenintegral auch noch in folgender Form geschrieben werden:

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x, y, z) \cos \angle(\vec{t}, x) + Q(x, y, z) \cos \angle(\vec{t}, y)] ds$$

Die Berechnung des normierten Tangentenvektors erfolgt wie gewohnt durch Ableiten nach dem Parameter und Normierung, man erhält

$$\vec{t}_0 = \frac{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

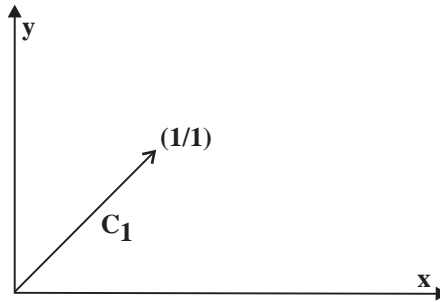
Das Kurvenintegral selbst kann nun ebenfalls in Parameterform bestimmt werden:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{v} d\vec{s} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{v} \vec{t}_0 \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt}_{\substack{ds \\ d\vec{s}}} = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x, y)\dot{x} + Q(x, y)\dot{y}] dt. \end{aligned}$$

Setzt man weiters als Vereinfachungen $dx = \dot{x} dt$ und $dy = \dot{y} dt$, so ergibt sich als vereinfachte vektorielle Schreibweise

$$W = \int_C P dx + Q dy = \int_C \vec{v} d\vec{x}$$

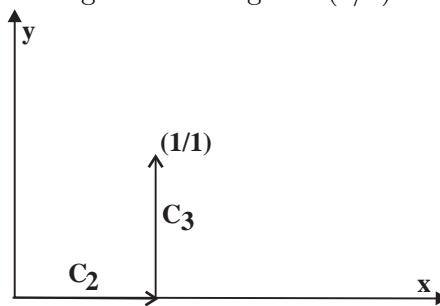
Beispiel 1.6. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und der Integrationsweg $C_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$:



Man beachte, dass der Integrationsweg eine *Orientierung* aufweist. Die Integration entlang C_1 ergibt

$$\begin{aligned} W &= \int_{C_1} \vec{v} d\vec{x} = \\ &= \int_{C_1} P dx + Q dy = \\ &= \int_{C_1} x dx + y dy \stackrel{x=y=t, dx=dy=dt}{=} \\ &= \int_{t_0}^1 (t dt + t dt) = \\ &= 2 \int_{t_0}^1 t dt = [t^2]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Beispiel 1.7. Betrachtet man nun dasselbe Feld, aber einen anderen Integrationsweg, nämlich den aus C_2 und C_3 zusammengesetzten Weg von $(0/0)$ nach $(1/1)$:



Die entsprechende Parametrisierungen der beiden Teilwege lauten

$$C_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1$$

und

$$C_3 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 1$$

Die Kurvenintegrale über die Teilstrecken sind

$$\int_{C_2} \vec{v} d\vec{x} = \int_{t_0}^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

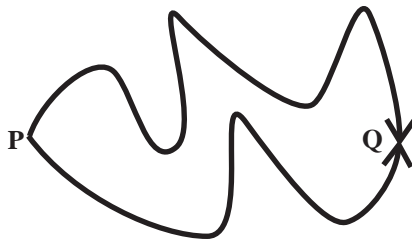
und

$$\int_{C_3} \vec{v} d\vec{x} = \int_{t_0}^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung. In diesem Beispiel hängt das Kurvenintegral nicht vom gewählten Weg ab, denn es gilt $\int_{C_1} = \int_{C_2} + \int_{C_3}$. Die physikalische Arbeit, die verrichtet werden muss, um vom Anfangspunkt zum Endpunkt zu gelangen, hängt nicht vom gewählten Weg ab.

Dies führt uns zur

Definition 1.8. Ein Kurvenintegral heißt *wegunabhängig*, falls es nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht vom zurückgelegten Weg.



Es gilt also für beliebige Wege C_1, C_2 von P nach Q

$$\int_{C_1} = \int_{C_2}.$$

Folgerung. Daraus ergibt sich als Folgerung, dass bei Wegunabhängigkeit das Integral entlang einer geschlossenen Kurve Null ist. Für $C = C_1 - C_2$ (das negative Vorzeichen steht hier wegen der Orientierung der Kurven) ist also

$$\int_C = \int_{C_1} - \int_{C_2} = 0.$$

Bemerkung. Bei Wegunabhängigkeit wird entlang geschlossener Wege keine Arbeit verrichtet.

Notation 1.9. Integrale entlang geschlossener Wege heißen *Ringintegrale*. Diese werden als

$$\int_C = \oint_C = \oint$$

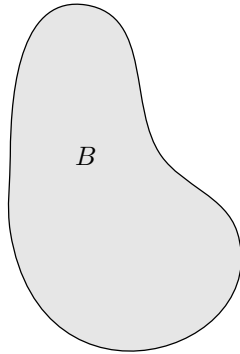
geschrieben.

1.2.3. Satz von GREEN-RIEMANN

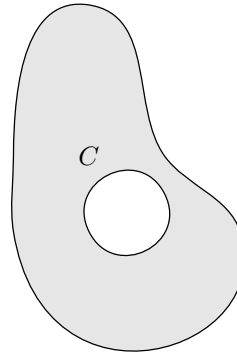
Definition 1.10. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte $x, y \in M$ durch eine stetige Kurve verbinden lassen, die ganz in M liegt.

Definition 1.11. Ein *Gebiet* ist eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Ein Gebiet B heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sein Rand $\text{Rd } B$ zusammenhängend ist.



Einfach zusammenhängendes Gebiet.



Nicht einfach zusammenhängendes Gebiet.

Bemerkung. Anschaulich gesprochen ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet ein „Gebiet ohne Löcher“.

Bemerkung. Die Orientierung des Randes wird so gewählt, dass der nach außen zeigende Normalvektor \vec{n} und der Tangentenvektor \vec{t} ein *Rechtssystem* (\vec{n}, \vec{t}) bilden.

Definition 1.12. Ein *Normalbereich* B_y bezüglich der y -Achse ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 , für die es Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und Funktionen $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$B_y = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

(Für festes x entspricht der Bereich also genau der Strecke $g(x) \leq y \leq h(x)$.)

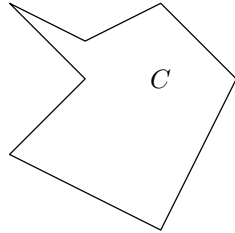
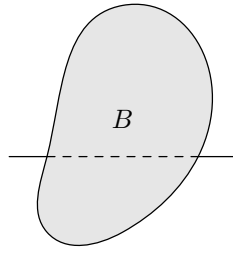
Analog definiere einen Normalbereich B_x bezüglich der x -Achse als

$$B_x = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

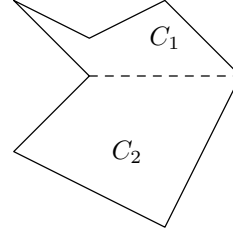
Bemerkung. Einen Normalbereich kann man sich folgendermaßen vorstellen:

„Sticht“ man in einen Normalbereich B_y bezüglich y -Achse in y -Richtung, verlässt man B_y ein einziges Mal und betritt es nie wieder (ebenso B_x in x -Richtung).

Bemerkung. Jeder Bereich lässt sich in Normalbereiche unterteilen, wobei sich die Orientierung von „Schnittstücken“ gegenseitig aufhebt.



Kein Normalbereich.



Aufteilung in Normalbereiche.

Definition 1.13. Für $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ bezeichne $B_r(\vec{x}_0)$ die Menge aller Punkte, deren Abstand von \vec{x}_0 kleiner als r ist.

Bemerkung. Im \mathbb{R}^2 entspricht das einem Kreis mit Mittelpunkt \vec{x}_0 und Radius r , im \mathbb{R}^3 einer Kugel.

Satz 1.1. Sei B ein Bereich und $C = \text{Rd } B$ sein Rand. Sei weiters $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld. Dann gilt

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

BEWEIS. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B = B_y$ ein Normalbereich bzgl. y -Achse (ansonsten zerlege den Bereich gemäß voriger Bemerkung in mehrere Normalbereiche). Dann kann das Bereichsintegral geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \iint_{B_y} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b P(x, h(x)) - P(x, g(x)) dx \\ &= - \int_C P dx. \end{aligned}$$

(Beachte, dass C entgegengesetzt zu h und g durchlaufen wird, daher das negative Vorzeichen!)

Analog erhält man

$$\iint_{B_y} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_C Q dy$$

und schließlich durch Addieren die gewünschte Aussage. □

Folgerung. Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G . Dann sind Kurvenintegrale über \vec{v} genau dann wegunabhängig, wenn die Integrabilitätsbedingung (IB)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

erfüllt ist.

BEWEIS. • „ \implies “: Sei (IB) erfüllt. Sei nun C eine beliebige geschlossene Kurve, die einen Bereich $B \subseteq G$ einschließt, also $C = \text{Rd } B$. Dann gilt aufgrund des Satzes von Green-Riemann

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \iint_B \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0 \text{ wegen (IB)}} \, dx \, dy = 0.$$

Somit ist das Kurvenintegral wegunabhängig.

• „ \impliedby “: Sei nun umgekehrt \vec{v} wegunabhängig. Betrachte einen Punkt $\vec{x} \in G$ und eine ε -Umgebung $B_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq G$ um \vec{x} . Da \vec{v} wegunabhängig ist, ist das Kurvenintegral entlang $C = \text{Rd } B_\varepsilon(\vec{x})$

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = 0.$$

Dies ist lt. Satz von Green-Riemann gleich dem Bereichsintegral über $B_\varepsilon(\vec{x})$, welches für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ strebt. Das muss aber 0 sein, also folgt $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (IB). \square

Bemerkung. Für nicht einfach zusammenhängende Gebiete G (also Gebiete mit „Löchern“) gilt die Aussage nicht. Eine geschlossene Kurve in G kann dann einen Bereich einschließen, der nicht vollständig in G liegt, sodass der Satz von Green-Riemann nicht angewendet werden kann.

Folgerung. Ein wegunabhängiges Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ besitzt ein Potential.

BEWEIS. Sei (x_0, y_0) fest. Betrachte die Funktion u mit

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P \, dx + Q \, dy.$$

Da \vec{v} wegunabhängig ist, kann das Integral entlang des „achsenparallelen“ Wegs berechnet werden und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q. \end{aligned}$$

Also ist u Potential von \vec{v} . \square

1.2.4. Wegunabhängigkeit bei Gradientenfeldern

Satz 1.2. Im Fall eines Gradientenfeldes (= Feld mit Potential) liegt Wegunabhängigkeit vor.

BEWEIS. Im R^2 ist $\vec{v} = \text{grad } u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$. Für $C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}; t_0 \leq t \leq t_1$ ist

$$\int_C \vec{v} d\vec{x} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x} dt + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y} dt.$$

Wegen der Kettenregel

$$\frac{du(x(t), y(t))}{dt} = u_x \dot{x} + u_y \dot{y}$$

folgt daher

$$\int_C \vec{v} d\vec{x} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{du}{dt} dt = u(P_0) - u(P_1). \quad \square$$

Das Kurvenintegral reduziert sich also in diesem Fall auf die reine *Potentialdifferenz*. Die physikalische Arbeit im Gradientenfeld ist also gleich der Potentialdifferenz von End- und Anfangspunkt. Fallen End- und Anfangspunkt zusammen, ist folglich das Kurvenintegral (Ringintegral) gleich 0.

1.2.5. Bestimmung des Potentials

Ist ein Feld gegeben und das zugehörige Potential — falls existent — gesucht, so führt dies auf eine exakte DGL. Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ muss bekanntlich im Fall eines Gradientenfeldes $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ gelten. Folglich ist u eine Stammfunktion des Differentials $P dx + Q dy$ (vgl. dazu die exakte DGL). Wie bei der exakten DGL ist auch hier die *Integrabilitätsbedingung (IB)* Voraussetzung für die Existenz eines Potentials:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Beispiel 1.8. Für obiges Feld mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist die IB wegen $P_y = Q_x = 0$ erfüllt. Durch Integration nach x erhält man aus der Ableitung nach x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \Rightarrow u(x, y) = \frac{x^2}{2} + \psi(y).$$

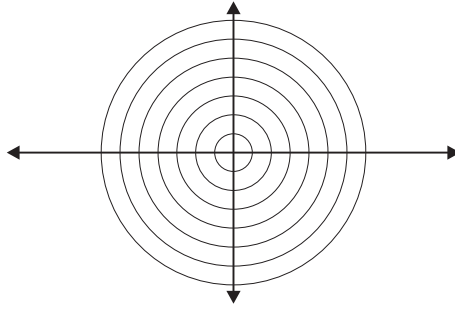
Nun differenziert man nach y und erhält

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \psi'(y) = Q = y \Rightarrow \psi(y) = \frac{y^2}{2} + K.$$

Das Potential ist somit bis auf eine additive Konstante bestimmt und lautet

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + K.$$

Die *Äquipotentiallinien* (Linien konstanten Potentials) sind in diesem Fall konzentrische Kreise.



Dass ein Kurvenintegral bei diesem Feld, wie zu erwarten ist, ebenfalls *wegunabhängig* ist, lässt sich einfach durch Integration über eine Äquipotentiallinie zeigen:

Beispiel 1.9.

$$W = \int_C x dx + y dy.$$

Die Gleichung der Kurve C ist die eines Kreises, also einer Äquipotentiallinie des Feldes mit $C : x^2 + y^2 = R^2$. Diese Gleichung muss allerdings, um eine Integration zu ermöglichen, in eine Parameterform gebracht werden. Die übliche Parameterdarstellung eines Kreises ist

$$C : \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} ; \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Damit wird $dx = -R \sin t dt$ und $dy = R \cos t dt$. Durch Einsetzen in das Integral erhält man

$$W = \int_C x dx + y dy = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-R^2 \cos t \sin t + R^2 \cos t \sin t)}_{=0} dt = 0.$$

Beispiel 1.10. Das Feld $\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ besitzt kein Potential, was durch Berechnung desselben Integrals leicht gezeigt werden kann. Außerdem ist die IB mit $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial P}{\partial y}$ nicht erfüllt. für den Wert des Ringintegrals gilt

$$\oint_{x^2+y^2=R^2} (-y dx + x dy) = R^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1} dt = 2\pi R^2.$$

Dieser Wert entspricht genau der doppelten Fläche der eingeschlossenen Kreisscheibe. Diese Erkenntnis folgt aus der bekannten **LEIBNIZ'schen Sektorformel**:

$$\text{Fl}(B) = \frac{1}{2} \oint_B (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \oint_B \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix}$$

2. Komplexe Funktionentheorie

2.1. Grundbegriffe über Funktionen im Komplexen

2.1.1. Einführung

Beispiel 2.1. Geht man von einem ebenen Vektorfeld aus, beispielsweise dem Gradientenfeld

$$\vec{v} = \text{grad} \ln \frac{1}{r} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{r^2} \\ -\frac{y}{r^2} \end{pmatrix}$$

(logarithmisches Potential), so ist unter Zuhilfenahme der GAUSS'schen Zahlenebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}; i^2 = -1$ eine Interpretation als *komplexe Funktion* möglich. Der Vektor \vec{v} kann als komplexe Zahl aufgefasst werden (dies gilt für jeden Vektor im \mathbb{R}^2).

Es gelten die üblichen Rechenregeln (wie im Reellen), die Definition des *Betrags* muss allerdings auf

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

erweitert werden.

Beispiel 2.2. Fasst man nun obiges Feld als komplexe Funktion auf, so erhält man mit

$$w = -\frac{x}{|z|^2} - i\frac{y}{|z|^2} = -\frac{1}{|z|^2} \underbrace{(x + iy)}_{=z} = -\frac{1}{|z|^2} z = -\frac{z}{z\bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}}$$

das folgende Ergebnis: Obiges Feld wird durch die komplexe Funktion $w(z) = -\frac{1}{\bar{z}}$ beschrieben.

Definition 2.1. Eine eindeutige Zuordnung, die der unabhängigen Variablen eine abhängige Variable $w = w(z)$ zuordnet, heißt *komplexe Funktion*. Eine Deutung als ebenes Vektorfeld ist möglich. Dabei ist $u = \Re w$ und $v = \Im w$. Damit wird

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Die Definitionsmenge für eine komplexe Funktion ist ein Teilgebiet oder ganz \mathbb{C} .

Definition 2.2. Ein *Gebiet* ist eine offene und zusammenhängende Punktmenge, d.h. der Rand gehört nicht zum Gebiet.

Beispiel 2.3. Im Beispiel ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, da die Division durch Null auch im Komplexen nicht definiert ist.

2.1.2. Beispiele von Funktionen

Ein wichtiger Typ von Funktionen sind auch im Komplexen die *Polynome*:

$$w(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$$

Der Definitionsbereich für Polynome ist $D = \mathbb{C}$. Außerdem gilt nach dem Fundamentalsatz der Algebra, dass jedes Polynom n -ten Grades in \mathbb{C} n Nullstellen besitzt.

Beispiel 2.4. Eine weitere Klasse von Funktionen bilden die *rationalen Funktionen*, die durch Division von Polynomen P und Q entstehen:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Der Definitionsbereich ist hier eingeschränkt. Da nicht durch Null dividiert werden darf, müssen die Nullstellen des Nennerpolynoms vom Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

2.1.3. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Definition 2.3. Eine Funktion $w = f(z)$ heißt *stetig in z_0* , falls für alle Punktfolgen $\langle z_n \rangle$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0)$$

gilt, d.h. der Feldvektor macht keine sprunghaften Änderungen. Eine Funktion $w = f(z)$ heißt stetig im Gebiet G , falls w in jedem Punkt $z_0 \in G$ stetig ist.

Satz 2.1 (Stetigkeitssatz). Die Stetigkeitseigenschaften bleiben bei Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten (außer bei den Nullstellen des Nenners) erhalten.

Folgerung. Polynome rationaler Funktionen sind im gesamten Definitionsbereich stetig.

Definition 2.4. Eine komplexe Funktion $w = f(z)$ heißt in z_0 *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(Limes des Differenzenquotienten) existiert. Als Bezeichnungsweise sei in diesem Fall zusätzlich die bereits bekannte

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$$

eingeführt.

Bemerkung. Alle Rechenregeln für das Differenzieren (Summen-, Produkt- und Kettenregel) im Reellen gelten auch für komplexe Funktionen. Ein Beweis soll hier nicht geführt werden, er erfolgt jedenfalls analog zum Reellen.

Beispiel 2.5.

$$(z^2 + z - 1)' = 2z + 1.$$

2.1.4. Potenzreihen im Komplexen

Analog zum Reellen kann man auch im Komplexen Funktionen in Potenzreihen (PR) entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Dabei ist z_0 der Entwicklungspunkt, a_n sind die Koeffizienten der Potenzreihe. Außerdem gilt der

Satz 2.2. Potenzreihen sind *konvergent* innerhalb des Konvergenzkreises mit dem Radius

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2.1.5. Hauptsatz über Potenzreihen

Satz 2.3. Innerhalb des Konvergenzkreises kann gliedweise addiert, multipliziert und differenziert werden. Der Konvergenzradius bleibt dabei erhalten.

Folgerung. Da man aus einer PR durch Differenzieren wieder eine PR erhält, folgt, dass eine PR unendlich oft differenzierbar ist.

Bemerkung. Im Reellen gibt es Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind, aber nicht in eine konvergente PR entwickelt werden können. Eine solche Funktion ist z.B. die bereits bekannte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Entwickelt man diese Funktion im Punkt 0 in eine TAYLOR-Reihe mit $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, so folgt aus $f^{(n)}(0) = 0$ eine PR, die identisch gleich Null ist. Da die Funktion selbst aber nur im Punkt 0 gleich 0 ist, kann sie nicht in eine PR entwickelt werden. Im Komplexen ist diese Funktion nicht differenzierbar (siehe später).

Definition 2.5. Eine Funktion, die in einem Punkt z_0 in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann, heißt *analytisch (regulär)* in z_0 . Die Funktion heißt *analytisch im gesamten Definitionsbereich*, wenn sie in jedem Punkt analytisch ist.

Beispiel 2.6. Betrachte

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Der Konvergenzradius ist $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \infty$. Die Exponentialfunktion ist also analytisch im gesamten Definitionsbereich, da die PR in ganz \mathbb{C} konvergent ist.

Beispiel 2.7. Betrachte

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Der Konvergenzradius ist hier, wie bereits bekannt, $R = 1$. Innerhalb des Einheitskreises um den Nullpunkt liegt also Konvergenz vor. Außerdem ist die gegebene Funktion sehr wohl in jedem Punkt $z_0 \neq 1$ analytisch, wie leicht gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{1-z_0}} \\ &= \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1-w} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^n}. \end{aligned}$$

Letztere PR ist einfach eine Reihe mit den Koeffizienten $a_n = \frac{1}{(1-z_0)^n}$ und dem Entwicklungspunkt z_0 . Für den Konvergenzradius gilt (nach den bekannten Rechenregeln für PR)

$$|w| < 1 \Rightarrow \left| \frac{z-z_0}{1-z_0} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < |1-z_0|.$$

Bemerkung. Wie aus diesem Beispiel ersichtlich ist, geht der Konvergenzbereich jeweils bis zu einer Singularität der Funktion, also zu einer Stelle, wo f nicht differenzierbar ist.

2.1.6. Hauptsatz der komplexen Funktionentheorie

Definition 2.6. Eine im gesamten Definitionsgebiet G differenzierbare Funktion heißt *holomorph*.

Satz 2.4 (Hauptsatz der komplexen Funktionentheorie). Jede holomorphe Funktion ist im gesamten Definitionsgebiet analytisch.

Folgerung. Eine holomorphe Funktion ist unendlich oft differenzierbar.

Folgerung. Die Funktion

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$$

ist nicht holomorph, da sie an der Stelle $z_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

2.1.7. Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Satz 2.5. Sind zwei holomorphe Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleich auf einem Kurvenstück, dann sind sie identisch im gesamten Definitionsgebiet.

Folgerung. Ist eine holomorphe Funktion entlang der reellen Achse festgelegt, so ist die gesamte Funktion im Komplexen definiert.

BEWEIS. Seien $f(z)$ und $g(z)$ holomorph. Dann sind sie analytisch im Punkt $z_0 \in G$ (Kurve) und es gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

bzw.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Damit folgt aus $f(z_0) = g(z_0)$ die Gleichheit der konstanten Koeffizienten:

$$z := z_0 \Rightarrow a_0 = b_0.$$

Nun bildet man die Differenz der PR

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^n$$

und dividiert unter der Voraussetzung $z \neq z_0$ durch $(z - z_0)$. Man erhält

$$\frac{f(z) - g(z)}{z - z_0} = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(z - z_0) + (a_3 - b_3)(z - z_0)^2 + \dots$$

und bei Einführung des Grenzübergangs $z \rightarrow z_0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - g(z)}{z - z_0} = 0 = (a_1 - b_1) + 0.$$

Beim Grenzübergang verschwinden alle Glieder mit $(z - z_0)$. Der Limes selbst ist wegen

$$\forall z \in G : f(z) = g(z)$$

gleich Null. Damit folgt aber direkt

$$a_1 - b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = b_1.$$

Für alle weiteren Koeffizienten wiederholt man den Vorgang sukzessive und erhält schließlich

$$f(z) \equiv g(z). \quad \square$$

2.2. CAUCHY-RIEMANN'sche Differentialgleichungen und harmonische Funktionen

2.2.1. CAUCHY-RIEMANN'sche Differentialgleichungen

Geht man wieder über die ebenen Vektorfelder vor, so lässt sich eine komplexe Funktion darstellen als

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y).$$

Die Ableitung ist dann nach gewohnter Definition

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[u(x, y) - u(x_0, y_0)] - i[v(x, y) - v(x_0, y_0)]}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

Dabei ist allerdings zu beachten, dass der Limes hier eine *beliebige* Annäherung an den Punkt z_0 bedeutet. Die horizontale bzw. vertikale Annäherung sind nur spezielle Fälle. Rechnet man diese Spezialfälle durch, so erhält man für die horizontale Annäherung mit $y = y_0 = \text{const.}$

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[u(x, y_0) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{x - x_0} = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0),$$

also die *partielle Ableitung nach x*, und für die vertikale Annäherung mit $x = x_0 = \text{const.}$

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{[u(x_0, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0, y) - v(x_0, y_0)]}{y - y_0} = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0).$$

Da die beiden Formeln bei Existenz der Ableitung denselben Wert ergeben müssen, erhält man damit die CAUCHY-RIEMANN'schen *Differentialgleichungen*:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y), \\ v_x(x, y) &= -u_y(x, y). \end{aligned}$$

Anders formuliert: Eine im Komplexen differenzierbare Funktion erfüllt immer die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Außerdem gilt auch die Umkehrung.

Satz 2.6. Eine Funktion $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ist in einem Gebiet G genau dann holomorph, wenn u und v im Reellen differenzierbar sind und die CAUCHY-RIEMANN'schen DGL gelten.

Beispiel 2.8. Gegeben sei die komplexe Funktion $f(z) = z^2$. Diese Funktion ist differenzierbar, da sie im Reellen differenzierbar ist und die CAUCHY-RIEMANN'schen DGL ergeben:

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 &= (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) \Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2; v(x, y) = 2xy \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \Rightarrow u_x = v_y; v_x = -u_y \end{aligned}$$

Bemerkung. Bei $f(z) = e^{-\text{frac}1z^2}$ sind die CAUCHY-RIEMANN'schen DGL nicht erfüllt. Daher ist diese Funktion nicht holomorph.

2.2.2. Interpretation von komplexen Funktionen

Jede komplexe Funktion kann als Koordinatentransformation der z -Ebene auf die w -Ebene interpretiert werden. Aus der MATHEMATIK I wissen wir, dass sich in jedem regulären Punkt zwei Koordinatenlinien schneiden. In solchen Punkten ist die Transformation eindeutig und daher die *Funktionaldeterminante* ungleich Null:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

Im obigen Fall ergibt sich: Die durch die holomorphe Funktion $f = u + iv$ definierte Koordinatentransformation ist in Punkten umkehrbar eindeutig, wo $f' \neq 0$ ist:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = v_y^2 + u_y^2 \geq 0.$$

Daraus ergibt sich, dass die Funktionaldeterminante nur dann Null ist, wenn $u_x = u_y = 0$ und damit

$$f' = 0$$

ist.

Folgerung. Die durch eine holomorphe Funktion vermittelte Koordinatentransformation ist in allen Punkten $f'(z_0) \neq 0$ eindeutig umkehrbar.

Satz 2.7. Die durch die holomorphe Funktion $w = f(z)$ vermittelte Koordinatentransformation ist für $f'(z_0) \neq 0$ in Umgebung von z_0 eindeutig umkehrbar und winkeltreu. Schneiden sich zwei Kurven unter einem bestimmten Winkel in der xy -Ebene, so bleibt der Winkel bei einer Koordinatentransformation erhalten.

BEWEIS. Die Tangentenvektoren an 2 Kurven $z_1 = z_1(t)$ und $z_2 = z_2(t)$ im Punkt $p_0 = z_1(t_1) = z_2(t_2)$ sind gegeben durch

$$v_1 = \frac{dz_1}{dt}(t_1),$$
$$v_2 = \frac{dz_2}{dt}(t_2).$$

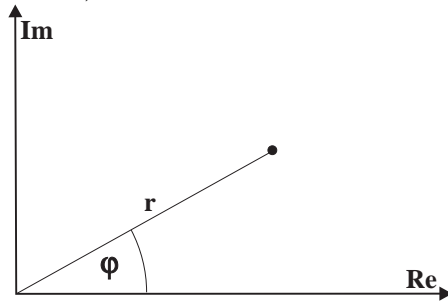
Führt man nun eine Koordinatentransformation durch, so ergeben sich die Tangentenvektoren an die transformierten Kurven als

$$w_1 = \frac{d}{dt}(f(z_1(t_1))) = \frac{df}{dz}(p_0) \frac{dz_1}{dt}(t_1),$$
$$w_2 = \frac{d}{dt}(f(z_2(t_2))) = \frac{df}{dz}(p_0) \frac{dz_2}{dt}(t_2).$$

Da sich die Tangentenvektoren nach der Transformation durch Multiplikation mit der Konstante $\frac{df}{dz}(p_0) \neq 0$ aus den ursprünglichen Tangentenvektoren ergeben, sind die Winkel zwischen v_1 und v_2 beziehungsweise w_1 und w_2 gleich. \square

Wiederholung: Festlegung von komplexen Zahlen mittels Polarkoordinaten

Neben der Darstellung als $z = x + iy$ kann eine komplexe Zahl (analog zur Darstellung eines Punktes in einer Ebene) auch in Form von Polarkoordinaten dargestellt werden:



Dabei gilt

$$r = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$-\pi < \varphi = \arg z \leq \pi.$$

Für den Winkel zwischen zwei komplexen Zahlen gilt

$$\angle(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1}.$$

Definition 2.7. Umkehrbar eindeutige, winkeltreue Transformationen heißen *konforme Abbildungen*.

2.2.3. Harmonische Funktionen

Aus den CAUCHY-RIEMANN'schen DGL

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

ergibt sich als Folgerung

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = -u_{xy} + u_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung. Realteil und Imaginärteil einer holomorphen Funktion erfüllen die Potentialgleichung.

Definition 2.8. Eine Lösung u der Potentialgleichung heißt *harmonische Funktion* oder *Potentialfunktion*, also $\Delta u = 0$.

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 2.8. Sind Realteil und Imaginärteil einer Funktion harmonisch, so ist die Funktion holomorph. (Der Beweis erfolgt mit Hilfe des STOKES'schen Integralsatzes.)

Bemerkung. Der Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist durch den Realteil bis auf eine (rein imaginäre) Konstante eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist auch der Realteil durch den Imaginärteil bis auf eine (reelle) Konstante eindeutig festgelegt.

Beispiel 2.9. Gesucht sei der Imaginärteil der holomorphen Funktion f mit Realteil

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Dazu prüft man zuerst, ob die Funktion u harmonisch ist:

$$\Delta u = 2 - 2 = 0.$$

Nun setzt man in die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ein und erhält

$$\begin{aligned} u_x = 2x &= v_y, \\ u_y = -2y &= -v_x. \end{aligned}$$

Daraus können wir $v(x, y) = 2xy + c$ bestimmen. Für die Funktion f gilt also

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy + c).$$

Bemerkung. Komplexe Funktionen können als komplexes Potential quellen- und wirbelfreier ebener Felder interpretiert werden, für die

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y) &= \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ Q_x &= P_y \end{aligned}$$

gilt. Man ordnet $\vec{E}(x, y)$ die komplexe Feldfunktion $f(z) = f(x + iy) = P + iQ$ zu. Bei den komplexen Funktionen treten an die Stelle der Integrierbarkeitsbedingung die CAUCHY-RIEMANN'schen DGL:

$$\begin{aligned} f(z) &= P + iQ, \\ P_x &= -Q_y, \\ Q_x &= P_y. \end{aligned}$$

Definition 2.9. Eine Stammfunktion $F(z)$ von $f(z)$ heißt *komplexes Potential* des Feldes.

Bemerkung. Mit

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

ergibt sich

$$f = F'(z) = U_x(x, y) + iV_x(x, y)$$

und weiter

$$\left. \begin{array}{l} U_x = P \\ V_x = -Q = -U_y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_x = P \\ U_y = Q \end{array} \right.$$

Der Realteil des komplexen Potentials ist also das reelle Potential des Feldes.

2.2.4. Zusammenfassung

- Ist f in einem Gebiet G differenzierbar, so ist f holomorph in G .
- Ist f in einem Gebiet G differenzierbar, so ist f analytisch in G , d.h. in konvergente Potenzreihen entwickelbar. Dabei muss der Konvergenzradius aber als gesamtes im Gebiet G liegen.
- Mit $f = u + iv$ und $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ergeben sich die CAUCHY-RIEMANN'schen DGL

$$\begin{aligned}u_x &= v_y, \\u_y &= -v_x.\end{aligned}$$

- u und v sind genau dann harmonisch, wenn $\Delta u = \Delta v = 0$ gilt.
- Das ebene Vektorfeld $\vec{E} = \vec{E}(z)$ ist quellen- und wirbelfrei, wenn $f(z) = \overline{\vec{E}(z)}$ holomorph ist.

2.3. Elementare Funktionen in \mathbb{C}

2.3.1. Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist definiert als

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Sie ist holomorph, ihr Konvergenzradius ist $R = \infty$.

2.3.2. Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind im Komplexen definiert als

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

Bemerkung. Es ergeben sich die gleichen Reihenentwicklungen wie im Reellen, die Funktionen stimmen also mit den üblichen Definitionen (im Reellen) überein.

Satz 2.9 (Permanenzprinzip der elementaren Funktionen).

Alle üblichen Formeln aus dem Reellen bleiben auch in \mathbb{C} erhalten, es gelten also EULER'sche Formel, Additionstheoreme usw.

BEWEIS. Die Begründung folgt aus dem Identitätssatz, da \mathbb{R} eine Teilmenge von \mathbb{C} ist. \square

Beispiel 2.10. Berechne $e^z = e^{x+iy}$. Es gilt

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Aus den Rechenregeln für Potenzen ergibt sich

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Folgerung. Da die Winkelfunktionen periodisch mit Periode 2π sind, heißt das, dass auch die Exponentialfunktion periodisch ist, weil

$$e^{z+2k\pi i} = e^z$$

gilt.

2.3.3. Nullstellen der Exponentialfunktion

Aus $e^z = 0$ folgt

$$\begin{aligned} e^x \cos y &= 0, \\ e^x \sin y &= 0, \end{aligned}$$

was aber nicht gleichzeitig erfüllt sein kann. Die Exponentialfunktion besitzt also auch im Komplexen keine Nullstelle.

2.3.4. Nullstellen der trigonometrischen Funktionen

Die Ermittlung erfolgt auch hier wie im Reellen:

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Rightarrow e^w = 1 \Rightarrow w = 2k\pi i,$$

somit

$$z = k\pi, k \in \mathbb{N}.$$

Analog ergibt sich für die Nullstellen des Cosinus

$$z = \frac{\pi}{2}(2k + 1), k \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung. Man beobachte, dass im Komplexen

$$\begin{aligned} \cosh iz &= \cos z, \\ \sinh iz &= \sin z \end{aligned}$$

gilt.

2.3.5. Weitere trigonometrische Funktionen

Für die Tangensfunktionen gelten die im Reellen üblichen Definitionen

$$\begin{aligned}\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \\ \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}.\end{aligned}$$

Definition 2.10. Das *Holomorphiegebiet* ist der größte mögliche Definitionsbereich, in dem eine Funktion $f(z)$ holomorph ist.

Im Fall der obigen Funktionen ist das Holomorphiegebiet ganz \mathbb{C} ohne die Nullstellen des Nenners, beim Tangens also

$$\left\{ z \in \mathbb{C}; z \notin \left\{ \dots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots \right\} \right\}.$$

Für den hyperbolischen Tangens ergibt sich als Einschränkung für das Holomorphiegebiet die Bedingung $\cosh z = 0$, die im Reellen nicht erfüllbar ist. Im Komplexen dagegen gilt

$$\cosh z = \cosh(-z) = \cos iz.$$

Die Nullstellen des Cosinus aber sind

$$iz = (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

somit

$$z = -i(2k + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Die Nullstellen des hyperbolischen Cosinus liegen also auf der imaginären Achse.

Bemerkung. Der hyperbolische Cosinus ist periodisch entlang der imaginären Achse.

Die Ermittlung des Holomorphiegebiets für die Cotangens-Funktionen erfolgt analog durch Ermittlung der Nullstellen der entsprechenden Sinusfunktionen.

2.3.6. Komplexer Logarithmus

Der Logarithmus stellt die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion dar. Da wir aber wissen, dass die Exponentialfunktion in \mathbb{C} periodisch ist, existiert keine eindeutige Umkehrung im ganzen Definitionsgebiet.

Um hier eine Lösung zu finden, zieht man die Polardarstellung einer komplexen Zahl zu Hilfe:

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

mit

$$\begin{aligned}r &= |z|, \\ \varphi &= \arg z.\end{aligned}$$

Nun sei als *Hauptwert des Arguments* der Wert

$$-\pi < \text{Arg } z = \varphi \leq \pi$$

festgelegt, d.h.

$$\arg z = \text{Arg } z + 2k\pi.$$

Dies führt (für $r \neq 0$) zu folgender

Definition 2.11.

$$\log z = \ln r + i \arg z = \ln r + i \text{Arg } z + 2k\pi i; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Der Logarithmus ist im Komplexen eine mehrdeutige Funktion für beliebige ganzzahlige k . Für jedes k gibt es einen Wert (Zweig) des Logarithmus. Als *Hauptwert des Logarithmus* bezeichnet man den Wert

$$\text{Log } z = \ln r + \text{Arg } z.$$

Beispiel 2.11.

$$\begin{aligned} \text{Log}(-2) &= \ln 2 + i\pi \\ \text{Log}(-1) &= \ln 1 + i\pi = i\pi \\ \text{Log } i &= \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln, z.B.

$$\log z_1 + \log z_2 = \underbrace{\ln r_1 + \ln r_2}_{\ln(r_1 r_2)} + i \underbrace{(\arg z_1 + \arg z_2)}_{\arg(z_1 z_2)} = \log(z_1 z_2)$$

Diese Formel stimmt aber *nicht* für Hauptwerte im allgemeinen!

Beispiel 2.12.

$$\begin{aligned} \text{Log}(-1) + \text{Log}(-1) &= 2\pi i, \\ \text{Log}((-1) \cdot (-1)) &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung. Für positive reelle Zahlen wird $\log z = \ln z$, für $z = 0$ ist der Logarithmus auch im Komplexen nicht definiert.

Etwas eigenartiger ist das Holomorphiegebiet des Logarithmus gestaltet. Da $\text{Arg } z$ unstetig entlang der negativen reellen Achse ist, ist hier auch der Logarithmus nicht holomorph. Als Holomorphiegebiet ergibt sich daher die *geschlitzte Ebene*, das komplexe Gebiet ausgenommen 0 und die negative reelle Achse:

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus R_0^-.$$

Die Überprüfung der Holomorphie kann durch die CAUCHY-RIEMANN'schen DGL erfolgen:

$$\operatorname{Log} z = \underbrace{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\arctan \frac{y}{x}}_{i v(x,y)}.$$

Die angegebenen Funktionen sind außer im Nullpunkt unendlich oft differenzierbar.

Eine Interpretation kann über das logarithmische Potential gegeben werden. Stellt man sich im Punkt $z_0 = 0$ eine punktförmige Ladung vor, so erhält man mit der Feldfunktion $f(z) = -\frac{1}{z}$ ein komplexes Potential mit $F' = f$.

Bemerkung. $\operatorname{Log} z$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ in $\tilde{\mathbb{C}}$.

BEWEIS. Sei $F(z) = \operatorname{Log}(z)$.

$$F'(z) = u_x + i v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}. \quad \square$$

Wir erhalten also das komplexe Potential $F(z) = -\operatorname{Log} z = -(\ln r + i \operatorname{Arg} z)$, die Äquipotentiallinien ergeben sich als konzentrische Kreise um den Nullpunkt aus $\ln r = \text{const.}$, die Feldlinien als Strahlen von 0 ausgehend aus $\operatorname{Arg} z = \text{const.}$.

Bemerkung. Es gilt auch allgemein, dass sich Äquipotenziallinien und Feldlinien in wirbelfreien Feldern immer unter einem Winkel von 90° schneiden.

Bemerkung. Da $\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{y}{x}$ nur im 1. und 4. Quadranten gilt, muss man im 2. und 3. Quadranten von einer veränderten Definition ausgehen:

$$\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{y}{x} \pm \pi.$$

2.3.7. Potenzfunktionen

Definition 2.12. Die allgemeine α -Potenz ist im Komplexen als

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

definiert

Diese Definition stellt an sich keine Neuigkeit dar, muss aber weiter untersucht werden: Man stellt fest, dass die Potenz keine eindeutige Funktion ist, da der Logarithmus im Komplexen nicht eindeutig ist. Man definiert daher auch hier einen *Hauptwert*:

Definition 2.13.

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}.$$

Wie gewohnt bleiben auch die üblichen Rechenregeln erhalten, wie z.B. beim Differenzieren:

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = e^{\alpha \log z} \alpha \cdot \frac{1}{z} = z^\alpha \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha-1}$$

Potenziert man mit einer ganzen Zahl, so erhält man wie gewohnt ein *eindeutiges* Ergebnis:

$$z^m = e^{m \log z} = e^{m(\log |z| + i\varphi + 2k\pi i)} = e^{m(\log |z| + i\varphi)} \cdot \underbrace{e^{2k\pi i \cdot m}}_{=1 \forall m \in \mathbb{Z}}.$$

Ähnliche Überlegungen lassen sich in Hinsicht auf die Berechnung von Wurzeln anstellen. Die Quadratwurzel ergibt sich aus

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\log |z| + i\varphi + 2k\pi i)} = e^{\frac{1}{2} \log |z| + k\pi i} = e^{\frac{1}{2} \log |z|} \cdot e^{k\pi i}$$

Der Faktor $e^{k\pi i}$ kann zwei verschiedene Werte annehmen, nämlich $+1$ und -1 . Man erhält also zwei Lösungen, die sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Für die m -te Wurzel ergeben sich dazu analog m verschiedene Werte:

$$\sqrt[m]{z} = z^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} \log z} \cdot e^{\frac{2k\pi i}{m}}$$

Der entsprechende Hauptwert ergibt sich aus $k = 0$.

Bemerkung. Für die Hauptwerte ist das Holomorphiegebiet wieder $\tilde{\mathbb{C}}$.

2.3.8. Arcus- und Areafunktionen

Arcuscosinus

Aus der Definition des Cosinus über die Exponentialfunktion $w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ kann die Umkehrfunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned} 2w &= e^{iz} + e^{-iz} \\ 2w &= u + \frac{1}{u} \\ u^2 - 2wu + 1 &= 0 \\ u &= w \pm \sqrt{w^2 - 1} \\ e^{iz} &= w \pm \sqrt{w^2 - 1} \\ iz &= \log \left(w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right) \\ z &= -i \log \left(w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\arccos w = -i \log \left(w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right).$$

Es handelt sich wieder um eine mehrdeutige Funktion. Der Hauptwert ist

$$\operatorname{Arccos} w = -i \operatorname{Log} \left(w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right).$$

Arcussinus

Die Ermittlung der Umkehrfunktion des Sinus $w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ erfolgt analog, man erhält

$$\arcsin w = -i \log \left(iw \pm \sqrt{w^2 + 1} \right).$$

Der Hauptwert ist hier

$$\operatorname{Arcsin} w = -i \operatorname{Log} \left(iw \pm \sqrt{w^2 + 1} \right).$$

Arcustangens, Arcuscotangens

Die zusammengesetzten Funktionen können analog zu oben berechnet werden.

Areasinushyperbolicus

Wie bei den Arcusfunktionen erhält man aus $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ mit der Substitution $e^z = u$ eine quadratische Gleichung, deren Lösung die Umkehrfunktion ergibt:

$$\operatorname{arsinh} w = \log \left(w \pm \sqrt{w^2 + 1} \right).$$

Der Hauptwert ist

$$\operatorname{Arsinh} w = \operatorname{Log} \left(w \pm \sqrt{w^2 + 1} \right).$$

Der Holomorphiebereich ergibt sich aus folgenden Überlegungen: Wegen der Rückführung auf den Logarithmus darf $w^2 + 1$ nicht negativ sein, also

$$w^2 + 1 = -r, \quad r \geq 0.$$

Damit wird

$$w^2 = -1 - r \implies w = si \implies -1 < s < 1.$$

Es sind also jeweils die Halbgeraden entlang der imaginären Achse auszunehmen. Man erhält eine doppeltgeschlitzte Ebene. Analoge Überlegungen können für die anderen Umkehrfunktionen angestellt werden.

2.4. Komplexe Kurvenintegrale

Gegeben sei eine komplexe Funktion $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, sowie eine Kurve C im Komplexen, die durch eine Parameterdarstellung $\gamma = \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $\alpha \leq t \leq \beta$ gegeben sei. Voraussetzung dafür, dass ein Kurvenintegral in diesem Fall wie im Reellen berechenbar ist, ist, dass die Kurve stückweise stetig differenzierbar ist. Dann gelten folgende Definitionen:

Definition 2.14.

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy, \\ dz &= \dot{x} dt + i \dot{y} dt = (\dot{x} + i \dot{y}) dt = \dot{z} dt. \end{aligned}$$

Definition 2.15.

$$\int_C f(z) dz = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(z) \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$

Daraus folgt in kartesischen Koordinaten

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + i dy) = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

Es sind also zwei reelle Kurvenintegrale zu berechnen.

Beispiel 2.13. Gegeben sei die Funktion $f(z) = z^2$, sowie die Kurve $z(t) = (1 + i)t$ mit $0 \leq t \leq 1$. Das Kurvenintegral berechnet sich daraus als

$$\int_C f(z) dz = \int_C z^2(t) \cdot \dot{z}(t) dt = (1 + i)^2 \int_0^1 t^2(1 + i) dt = (1 + i)^3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{(1 + i)^3}{3}.$$

Bemerkung. Besteht die Kurve aus mehreren Stücken, so werden die Kurvenintegrale über die Teilstücke einfach addiert.

Bemerkung. Obiges Kurvenintegral kann natürlich auch auf eine andere Art berechnet werden, indem man die reellen Teilintegrale auswertet, und zwar mit den Funktionen

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2, \\ v(x, y) &= 2xy. \end{aligned}$$

Das Kurvenintegral ist dann

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

2.4.1. Rechenregeln

Es gelten die bekannten Rechenregeln.

Linearität

$$\begin{aligned} \int [f(z) + g(z)] dz &= \int f(z) dz + \int g(z) dz. \\ \int a f(z) dz &= a \int f(z) dz. \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung

$$\left| \int f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| |dz|.$$

Mit

$$|dz| = |dx + i dy| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$$

(der Definition für das *Bogenelement*) erhält man ein *reelles skalares Kurvenintegral*

$$\int |f(z)| |dz| = \int |f(z)| ds.$$

Daraus ergibt sich, dass für $M \geq \max |f(z)|$

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \int ds = M \cdot \text{Länge von } C$$

gilt.

Stammfunktion

Sei F eine Stammfunktion von f in einem Gebiet, das die Kurve

$$C : z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$$

enthält. Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = \int_C F'(z) dz = \int_\alpha^\beta \underbrace{F'(z(t)) \cdot \dot{z}(t)}_{= \frac{dF(z(t))}{dt} dt} = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(z(t)) dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Beispiel 2.14. In obigem Beispiel ergibt sich so mit

$$f(z) = z^2 \Rightarrow F(z) = \frac{z^3}{3}$$

für das Integral

$$\int_C z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

Bemerkung. Wie bereits bekannt, gibt es für die Funktion $f(z) = z^n$ zwei verschiedene Stammfunktionen:

$$F(z) = \begin{cases} \frac{z^{n+1}}{n+1} & \text{für } n \neq -1, \\ \text{Log } z & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Folgerung. Falls f eine Stammfunktion in einem Gebiet besitzt, das die geschlossene Kurve C enthält, dann ist

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Daraus ergibt sich, dass bei obiger Funktion für $n \neq -1$ das Ringintegral

$$\oint_C z^n dz = 0$$

ergibt, nicht aber für $n = -1$, da für den Logarithmus der Nullpunkt aus dem Holomorphiegebiet ausgenommen ist. Das Ringintegral ergibt hier

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} dt}{Re^{it}} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

2.4.2. Integralsatz von CAUCHY

Satz 2.10. Sei $f(z)$ holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet und sei C eine geschlossene Kurve im Gebiet. Dann gilt

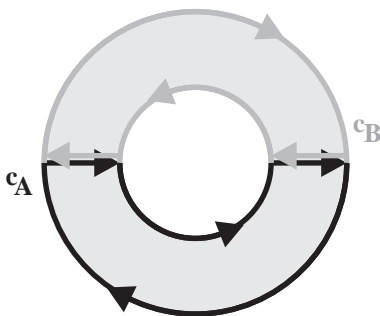
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

BEWEIS. Ein Beweis ergibt sich sofort aus den reellen Integralen (siehe Gleichung 2.4), indem man die CAUCHY-RIEMANN'schen DGL als Integrabilitätsbedingung benützt und den STOKES'schen Integralsatz anwendet.

Bei Ringgebieten mit dem äußeren Rand C_1 und dem inneren Rand C_2 verändert sich diese Formel zu

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz.$$

Um dies einzusehen, berechnet man einfach zwei getrennte Ringintegrale nach folgender Aufteilung:



Da es sich bei beiden Kurven um geschlossene Kurven handelt, ergeben beide Ringintegrale

$$\oint_{C_A} f(z) dz = \oint_{C_B} f(z) dz = 0.$$

Addiert man nun beide Ringintegrale, so erhält man nichts Anderes als die Summe der beiden Ringintegrale von äußerem und innerem Rand, da sich die Stücke, die das Gebiet durchqueren, aufgrund ihrer entgegengesetzten Orientierung aufheben, er ergibt sich die obige Formel. \square

Als weitere Folgerung ergibt sich die CAUCHY'sche Integralformel (CIF):

Satz 2.11. Sei f holomorph in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und z_0 ein Punkt aus G . Dann gilt für eine Kurve in G , die z_0 einmal umrundet:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

BEWEIS. Der Wert dieses Integrals ist von C unabhängig, solange z_0 im Inneren von C liegt. Daher gilt

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \underbrace{\oint_{C_2} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz}_{=I_1} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz}_{=I_2}.$$

Das zweite Ringintegral ist sehr einfach zu berechnen:

$$I_2 = f(z_0) \oint_{C_2} \frac{dz}{z - z_0} \stackrel{z - z_0 := w}{=} f(z_0) \oint_{C_2} \frac{dw}{w} = 2\pi i f(z_0).$$

Nun ist noch zu zeigen, dass I_1 gegen Null geht. Dies gelingt mit Hilfe der Tatsache, dass der Differenzenquotient für $z \rightarrow z_0$ bei holomorphen Funktionen gegen den Differentialquotienten geht und daher beschränkt ist. Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich daher

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq M$$

und weiter

$$|I_1| \leq M \cdot \text{Länge von } C_2 = M \cdot 2\pi\varepsilon.$$

Dieser Wert geht aber für $\varepsilon \rightarrow 0$ ebenfalls gegen Null. \square

Folgerung. Ein wirbel- und quellenfreies ebenes Feld in einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist eindeutig durch die Vorgabe entlang einer Randkurve C bestimmt, und zwar als „Integralmittelwert“.

Folgerung. Durch Differenzieren unter dem Integralzeichen erhält man auch die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \\ f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz, \\ f''(z_0) &= \frac{2}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz, \\ f'''(z_0) &= \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^4} dz, \end{aligned}$$

und allgemein

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Bemerkung. Daraus resultiert eine Methode zum Berechnen von Integralen, die ansonsten mittels Parametrisierung berechnet werden müssten, was in der Regel sehr arbeitsaufwendig ist.

2.5. Residuenkalkül

Beispiel 2.15. Es soll das reelle Integral

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^{2p} x dx$$

mit $p \in \mathbb{N}$ berechnet werden. Dazu verwandelt man den Cosinus in seine Definition über die Exponentialfunktion $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ und substituiert $z := e^{ix}$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$, man erhält

$$I = \frac{1}{2^{2p}} \int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2p} dx = \frac{-i}{2^{2p}} \oint \left(z^{2p} + z^{2p-1} \cdot \frac{1}{z} \cdot \binom{2p}{1} + \dots\right) \frac{dz}{z}.$$

Wegen $\oint z^n dz = 0$ für $n \neq -1$ fallen alle Integrale bis auf $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ weg, das Gesamtintegral ist daher

$$I = \frac{-i}{2^{2p}} \oint \binom{2p}{p} \frac{dz}{z} = \frac{\binom{2p}{p} \pi}{2^{2p-1}} = \frac{(2p)! \pi}{(p!)^2 2^{2p-1}}.$$

2.5.1. LAURENT-Entwicklung und Residuum

Definition 2.16. Ist f in einem Gebiet G bis auf z_0 holomorph, so lässt sich die Funktion f in einer eindeutig bestimmten LAURENT-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

darstellen. Dabei ist

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

Die LAURENT-Reihe reduziert sich auf eine Potenzreihe, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$. In diesem Fall existiert an der Stelle z_0 eine *hebbare* Lücke, die Funktion f ist auf ganz G holomorph. Existiert dagegen ein $a_{-n} \neq 0$ mit $a_{-n-1} = a_{-n-2} = \dots = 0$, dann wird z_0 als *Polstelle* bezeichnet.

Beispiel 2.16. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{z+1} + \frac{z}{2i(z-i)} - \frac{z}{2i(z+i)}$$

besitzt an den Stellen $z_1 = -1$, $z_2 = i$ und $z_3 = -i$ je einen Pol *erster Ordnung*.

Definition 2.17. Der Koeffizient a_{-1} wird als das *Residuum* bezeichnet.

Es kann berechnet werden, indem man eine Funktion f mit einem Pol n -ter Ordnung mit $(z - z_0)^n$ multipliziert und anschließend wiederholt differenziert:

$$\text{Res } f = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)]}{dz^{n-1}}$$

Mit Hilfe des Residuums lassen sich einfach Integrale berechnen. Man verwendet dazu folgenden

Satz 2.12 (Residuensatz).

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_j} n(C, z_j) \cdot \text{Res}[f; z_j],$$

wobei $n(C, z_j)$ die Anzahl der Windungen ist, die die Kurve um den Entwicklungspunkt z_j vollführt. Über die Entwicklungspunkte z_j wird summiert.

Beispiel 2.17. Sei die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

gegeben. Ihre Pole erhält man aus $z^4 + 1 = 0$, d.h. $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $z_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Das Residuum ist

$$\text{Res}[f; z_1] = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)}.$$

Dies entspricht aber, wenn man den Zähler der rationalen Funktion mit $A(z)$ und den Nenner mit $B(z)$ bezeichnet, auch folgender Darstellung:

$$\text{Res}[f; z_1] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{A(z)}{\frac{B(z) - B(z_1)}{z - z_1}}.$$

Dieser Grenzwert kann mit Hilfe der Grenzwertsätze und der Tatsache, dass es sich bei Zähler und Nenner um holomorphe Funktionen handelt, berechnet werden; er ist

$$\text{Res}[f; z_1] = \frac{A(z_1)}{\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{B(z) - B(z_1)}{z - z_1}} = \frac{A(z_1)}{B'(z_1)}.$$

Da $B'(z_1)$ aber nur für Pole 1. Ordnung ungleich Null ist, gilt diese Beziehung im Gegensatz zu obiger allgemeiner Darstellung nur für Pole erster Ordnung:

$$\text{Res}[f; z_1] = \frac{A(z_1)}{B'(z_1)}.$$

Beispiel 2.18 (Fortsetzung).

$$\text{Res}[f; z_1] = \frac{1}{4 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{-1 - i}{4\sqrt{2}}.$$

Analog dazu ist

$$\text{Res}[f; z_2] = \frac{1}{4 \cdot e^{\frac{9\pi}{4}i}} = \frac{1 - i}{4\sqrt{2}}.$$

2.5.2. Berechnung von reellen Integralen

Beispiel 2.19. Sei das Integral über die obige Funktion und einen Halbkreis mit Radius R in der komplexen Zahlenebene zu berechnen. Nach dem Residuensatz gilt

$$\oint_C \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}[f; z_j] = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Dabei werden natürlich nur die Pole *innerhalb der Kurve* berücksichtigt; in diesem Fall sind es, wie oben angeführt, zwei Stück.

Beispiel 2.20 (Normierung der STUDENT-Verteilung). Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 3)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{z^2}{3} + 1\right)^2}.$$

Aus dieser Funktion ergibt sich durch Normierung die bereits aus der Statistik bekannte STUDENT-Verteilung. Normierung bedeutet dabei, dass eine Dichtefunktion entsteht, indem man die Funktion mit einem Faktor derart multipliziert, dass das uneigentlichen Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1$ ergibt. Dazu berechnet man das *uneigentliche reelle Integral*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2}.$$

Da es sich um ein Nennerpolynom 4. Grades handelt, muss es vier Nullstellen geben. Durch Nullsetzen des Nenners erhält man aber

$$z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm\sqrt{3}i.$$

Es handelt sich also um Pole 2. Ordnung. Das Residuum muss daher mittels unbestimmten Ansatzes bestimmt werden:

$$\frac{1}{(z^2 + 3)^2} = \frac{C_{-2}}{(z - \sqrt{3}i)^2} + \frac{C_{-1}}{(z - \sqrt{3}i)} + C_0 + C_1(z - \sqrt{3}i) + \dots.$$

Man multipliziert nun mit $(z - \sqrt{3}i)^2$ und erhält

$$\frac{1}{(z + \sqrt{3}i)^2} = C_{-2} + C_{-1}(z - \sqrt{3}i) + C_0(z - \sqrt{3}i)^2 + \dots.$$

Nun setzt man $z = \sqrt{3}i$ ein und erhält

$$C_{-2} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}i}\right)^2 = \left(\frac{-i}{2\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{1}{12}.$$

Nun differenziert man zur Bestimmung des Residuums den unbestimmten Ansatz einmal:

$$\frac{-2}{(z + \sqrt{3}i)^3} = C_{-1} + 2C_0(z - \sqrt{3}i) + \dots.$$

Es wird wieder $z = \sqrt{3}i$ eingesetzt, und es ergibt sich das Residuum

$$C_{-1} = \frac{-2}{(2\sqrt{3}i)^3} = \frac{-2i}{8 \cdot 3\sqrt{3}} = -\frac{i}{12\sqrt{3}}.$$

Analog verfährt man für den zweiten Pol.

Bemerkung. Der unbestimmte Ansatz liefert schrittweise alle Koeffizienten $C_{-j}, C_{-j+1}, \dots, C_{-1}$, also den Hauptteil der Funktion.

Beispiel 2.21. Gesucht sei das Integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx.$$

Dazu substituiert man

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2},$$

somit

$$i dx e^{ix} = dz \implies dx = \frac{dz}{iz},$$

und berechnet das Integral über den Residuensatz:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}[f; z_j].$$

2.5.3. Uneigentliche reelle Integrale

Wenn man ein Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

berechnen will, so muss vorausgesetzt werden, dass $|z \cdot f(z)|$ gleichmäßig gegen Null geht für $z \rightarrow \infty$. Dabei ist es unerheblich, in welche Richtung das Wachstum gegen Unendlich durchgeführt wird, es muss für jede beliebige Richtung gelten. Bei rationalen Funktionen ist dies sichergestellt, wenn der Grad des Nenners um mindestens zwei größer als der Grad des Zählers ist.

Beispiel 2.22.

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 3)^2}.$$

Die Gradbedingung ist, wie leicht nachgeprüft werden kann, erfüllt. Es wird nun über einen Halbkreis mit Radius R integriert. Man erhält

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + 3)^2} + \underbrace{\int_{t=0}^{\pi} \frac{1}{(R^2 e^{2it} + 3)^2} \cdot Re^{it} dt}_{I_R}.$$

Nun gilt aber

$$|I_R| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^4} dt = \pi \frac{1}{R^3}.$$

Dieser Ausdruck geht aber für wachsende R gegen Null. Somit kann das uneigentliche Integral selbst nach dem Residuensatz berechnet werden. Innerhalb des Halbkreises liegt nur einer der beiden Pole, daher gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2} = 2\pi i \text{Res}[f; \sqrt{3}i] = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

2.6. FOURIER-Transformation

Wiederholung: FOURIER-Reihen im Komplexen Sei $f(x)$ eine $2L$ -periodische Funktion. Dann ist

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

mit

$$a_n = \frac{1}{L} \int f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Ersetzt man nun Sinus und Cosinus durch ihre Definition als Exponentialfunktionen, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right) - ib_n \left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \right) \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{n\pi i}{L}x}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten werden aus den bekannten Formeln berechnet:

$$\begin{aligned} 2c_n &= a_n - ib_n = \\ &= \frac{1}{L} \int f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx - i \frac{1}{L} \int f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \left[\cos \frac{n\pi}{L} x - i \sin \frac{n\pi}{L} x \right] dx = \\ &= \frac{1}{L} \int f(x) e^{-\frac{n\pi}{L}ix} dx. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$c_n = \frac{1}{2L} \int f(x) e^{-\frac{n\pi}{L}ix} dx.$$

FOURIER-Darstellung nicht-periodischer Funktionen Eine beliebige Funktion kann als periodische Funktion mit unendlich großem Periodenintervall angesehen werden. Für ein gegebenes Intervall zerlegt man dieses in ein Raster. Mit der Abkürzung $u = \frac{n\pi}{L}$ erhält man eine Hilfsfunktion

$$C_L(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-uix} dx.$$

Daraus ergibt sich für die FOURIER-Koeffizienten auf $[-L, L]$

$$c_n = \frac{\pi}{L} C_L(u_n).$$

Die Länge des Zerlegungsintervalls ist

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = (n+1) \frac{\pi}{L} - n \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Nun kann eine FOURIER-Reihe (auf $[-L, L]$) entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_L(u_n) e^{iu_n x} \Delta u_n.$$

Diese Summe konvergiert für $L \rightarrow \infty$ gegen das Integral

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux} dx$$

und man erhält das FOURIER'sche Integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u)e^{iux} dx.$$

Satz 2.13. Sei $f(x)$ eine Funktion auf $(-\infty, \infty)$ und dort integrierbar. Dann ist f darstellbar als

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u)e^{iux} du$$

mit

$$c(u) = \hat{f}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux} dx.$$

Definition 2.18. $\hat{f}(u)$ heißt die FOURIER-Transformierte von f . Schreibe

$$\hat{f} = \mathcal{F}f.$$

Es handelt sich dabei um eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f + g) &= \mathcal{F}f + \mathcal{F}g, \\ \mathcal{F}(a \cdot f) &= a \cdot \mathcal{F}f.\end{aligned}$$

Bemerkung. Die Umkehrformel ergibt sich aus

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u)e^{iux} dx = 2\pi\mathcal{F}(\bar{\hat{f}})$$

für eine reellwertige Funktion f . Eine Bezeichnungsweise ist auch

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}.$$

Folgerung. Die FOURIER-Transformation ist eine eindeutig umkehrbare Integral-Transformation:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1} &= 2\pi\bar{\mathcal{F}}, \\ \mathcal{F}^{-1}(x) &= 2\pi\mathcal{F}(-x).\end{aligned}$$

Beispiel 2.23. Die DIRICHLET'sche Sprungfunktion ist definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} c(u) = \hat{f}(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-iux} dx = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi iu} e^{-iux} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2\pi iu} = \frac{\sin u}{\pi u}. \end{aligned}$$

Die Funktion ist also

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\pi u} e^{iux} du.$$

Bemerkung. Das FOURIER'sche Integral an der Sprungstelle dieser Funktion hat den Wert $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Folgerung (für $x = 0$).

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{\pi u} du \implies \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

Dieses Integral findet Anwendung in der Signalverarbeitung.

Beispiel 2.24. Die CAUCHY-Verteilung besitzt eine Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Durch eine FOURIER-Transformation erhält man die sogenannte *Charakteristik* der Verteilung:

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux}}{1+x^2} dx.$$

Dies ist ein uneigentliches Integral vom Typ $e^{imx} \cdot f(x)$, dessen Lösung mit dem Residuensatz gelingt. Die Voraussetzung ist erfüllt, da die Funktion, mit der multipliziert wird, für wachsende x sicher gegen Null geht. Als Lösung ergibt sich über eine Fallunterscheidung ($u < 0$ und $u \geq 0$) und daraus

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}.$$

2.6.1. Anwendung auf Probleme bei partiellen Differentialgleichungen

Man bestimme die Lösung des Dirichlet'schen Randwertproblems bei der Potentialgleichung für die Halbebene $y > 0$.

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x < \infty, y > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) & -\infty < x < \infty, \\ u &\text{ beschränkt für } y \rightarrow \infty, \\ u, u_x &\rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

FOURIER-Transformation von $u(x, y)$ bzgl. x :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(x, y)] &= U(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, y) e^{i\xi t} dt \\ \mathcal{F}[u_{xx}] &= (-i\xi)^2 \mathcal{F}[u] = -\xi^2 U(\xi, y) \\ \mathcal{F}[u_{yy}] &= U_{yy}.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung

$$U_{yy} - \xi^2 U = 0$$

mit der Lösung

$$U(\xi, y) = A(\xi)e^{\xi y} + B(\xi)e^{-\xi y}.$$

Da u für $y \rightarrow \infty$ beschränkt ist, muss auch U beschränkt bleiben für $y \rightarrow \infty$.

1. $\xi > 0$: $A(\xi) \stackrel{!}{=} 0$, d.h.

$$U(\xi, y) = B(\xi)e^{-\xi y}.$$

2. $\xi < 0$: $B(\xi) \stackrel{!}{=} 0$, d.h.

$$U(\xi, y) = A(\xi)e^{\xi y}.$$

Somit gilt $U(\xi, 0) = B(\xi)$ für $\xi > 0$ und $U(\xi, 0) = A(\xi)$ für $\xi < 0$, also

$$U(\xi, y) = U(\xi, 0)e^{-|\xi|y}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Mit

$$U(\xi, 0) = \mathcal{F}[u(x, 0)] = \mathcal{F}[f(x)]$$

folgt

$$U(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\xi t} e^{-|\xi|y} dt.$$

Die inverse Transformation liefert schließlich

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\xi[i(t-x)] - |\xi|y} d\xi \right) dt \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt.\end{aligned}$$

2.7. LAPLACE-Transformation

Definition 2.19. Für eine geeignete Funktion $f(t)$ ist die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ definiert als

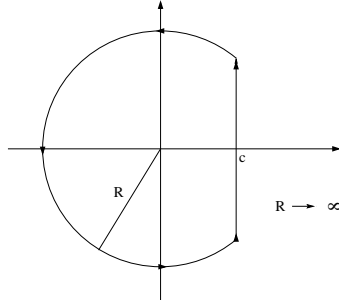
$$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s > 0$$

Dabei wird s als Transformationsvariable bezeichnet.

Voraussetzung: Das uneigentliche Integral existiert!

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

c wird so gewählt, dass in der komplexen Zahlenebene alle singulären Punkte des Integranden links von der Geraden $x = c$ liegen.



Beispiel 2.25. $f(t) = c$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty ce^{-st} dt = c \cdot \frac{-1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty = -\frac{c}{s}(0 - 1) = \frac{c}{s}.$$

Beispiel 2.26. $f(t) = t$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty te^{-st} dt = \underbrace{-\frac{t}{s} \cdot e^{-st}}_0 \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}.$$

Beispiel 2.27. $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$.

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt \stackrel{st=\xi}{=} \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^\alpha d\xi = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Speziell für $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Beispiel 2.28. $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Beispiel 2.29. $f(t) = \sin \omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) &= \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt = \left| \begin{array}{l} \sin \omega t = u, u' = \omega \cos \omega t \\ e^{-st} = v', v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right| \\ &= -\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s} \int_0^\infty \cos \omega t e^{-st} dt \\ &= \left| \begin{array}{l} \cos \omega t = u, u' = -\omega \sin \omega t \\ e^{-st} = v', v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right| \\ &= \frac{\omega}{s} \left(-\frac{1}{s} \cos \omega t e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s} \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt \right) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} F(s), \end{aligned}$$

somit

$$\implies F(s) = \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Beispiel 2.30. $f(t) = \cos \omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{\omega} \mathcal{L}\{\sin \omega t\} \implies \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Definition 2.20. Eine Funktion $f(t)$ ist von *exponentieller Ordnung* für $t \rightarrow \infty$, falls eine Konstante $a > 0$ existiert, sodass

$$e^{-at} f(t)$$

beschränkt ist für alle $t > T$, d.h.

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{at}, M > 0.$$

Schreibweise: $f(t) = \mathcal{O}(e^{at})$ für $t \rightarrow \infty$

Beispiel 2.31. t^k , $\sin bt$, $t^k e^{at} \cos bt$, $t^k e^{at} \sin bt$ mit $k, a, b \in \mathbb{R}$ sind von exponentieller Ordnung.

Satz 2.14. Sei f stückweise stetig in $[0, T]$ für $T > 0$ und sei f von exponentieller Ordnung, d.h.

$$f(t) = \mathcal{O}(e^{at}) \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Dann existiert die LAPLACE-Transformierte von $f(t)$ für $s > a$.

BEWEIS.

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty \underbrace{|f(t)|}_{\leq M e^{at}} e^{-st} dt \leq M \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{M}{s-a} \text{ für } s > a$$

Satz 2.15 (Eigenschaften der LAPLACE-Transformation).

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} = \lambda \mathcal{L}\{f(t)\} + \mu \mathcal{L}\{g(t)\}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \text{ mit } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0 \quad (2.3)$$

Mit der HEAVISIDE-Funktion

$$H(t-b) := \begin{cases} 1 & t \geq b \\ 0 & t < b \end{cases}$$

gilt

$$\mathcal{L}\{H(t-b)f(t-b)\} = e^{-bs} F(s), b \geq 0. \quad (2.4)$$

BEWEIS. **Zu** (2.1) Die Integration ist linear.

Zu (2.2)

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a).$$

Zu (2.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(ct)\} &= \int_0^\infty f(ct)e^{-st} dt \quad \left| \text{Subst.: } \xi = ct \quad dt = \frac{1}{c}d\xi \right| = \frac{1}{c} \int_0^\infty f(\xi)e^{-\frac{s}{c}\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right).\end{aligned}$$

Zu (2.4)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{H(t-b) \cdot f(t-b)\} &= \int_0^\infty H(t-b)f(t-b)e^{-st} dt = \int_b^\infty 1 \cdot f(t-b)e^{-st} dt \\ &= \left| \text{Subst.: } t-b = \xi \quad dt = d\xi \right| = \int_{\xi=0}^\infty f(\xi)e^{-s(\xi+b)} d\xi \\ &= e^{-sb} \int_0^\infty f(\xi)e^{-s\xi} d\xi = e^{-sb} F(s).\end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 2.32.

$$\mathcal{L}\{e^{-t}t^2\} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{2}{(s+1)^3} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}.$$

Beispiel 2.33.

$$\mathcal{L}\{e^{-t} \sin \omega t\} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{\omega}{(s+1)^2 + \omega^2} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Beispiel 2.34.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right\} \stackrel{(2.1)}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{s^2 - 1}.\end{aligned}$$

Satz 2.16 (Differentiation). f sei stetig, f' stückweise stetig in $[0, T]$, $T > 0$, $f(t) = \mathcal{O}(e^{at})$ für $t \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = -\frac{1}{s}f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s}f(0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f'(t)\} \\ &\quad \begin{aligned} f(t) &= u, u' = f'(t) \\ e^{-st} &= v', v = -\frac{1}{s}e^{-st}. \end{aligned}\end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \cdot f'(t)\right\} = s \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s \cdot (s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - s \cdot f(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Folgerung.

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{n-1}(0).$$

Satz 2.17 (Integration). Ist $F(s)$ die LAPLACE-Transformierte von $f(t)$, so gilt

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

BEWEIS. $f(t) = \mathcal{O}(e^{at})$.

$$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \leq \int_0^t \underbrace{|f(\tau)|}_{\leq Me^{a\tau}} d\tau \leq M \int_0^t e^{a\tau} d\tau \leq \tilde{M}e^{at},$$

also existiert die LAPLACE-Transformierte von $\int_0^t f(\tau)d\tau$. Damit gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = s \cdot \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} - \underbrace{\int_0^0 f(\tau)d\tau}_{=0}.$$

Beispiel 2.35. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Sei $\varphi(t)$ eine Lösung des Problems mit $\mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \Phi(s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varphi''\} &= s^2\Phi(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0) = s^2\Phi(s), \\ \mathcal{L}\{\varphi'\} &= s\Phi(s) - \varphi(0) = s\Phi(s), \\ \mathcal{L}\{e^{3t}\} &= \frac{1}{s-3}. \end{aligned}$$

Damit folgt aus der Differentialgleichung

$$s^2\Phi(s) - 3s\Phi(s) + 2\Phi(s) = \frac{1}{s-3},$$

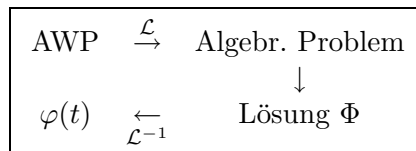
daraus wiederum

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2)(s - 3)}$$

und somit

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} \stackrel{\text{PBZ}}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-3}\right\} = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Damit haben wir folgende Schritte zur Lösung des AWP gemacht:



Beispiel 2.36. Man bestimme die allgemeine Lösung von $y'' + 4y = 0$. Setze $y(0) = A$, $y'(0) = B$ für $A, B \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathcal{L}\{\varphi'' + 4\varphi\} = s^2\Phi(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0) + 4\Phi(s) = s^2\Phi(s) - sA - B + 4\Phi(s) = 0.$$

Daraus folgt

$$\Phi(s) = \frac{As + B}{s^2 + 4}, \quad \varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As}{s^2 + 4} + \frac{B}{s^2 + 4}\right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As}{s^2 + 4}\right\} &= A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2^2}\right\} = A \cos 2t, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s^2 + 4}\right\} &= \frac{B}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 2^2}\right\} = \frac{B}{2} \sin 2t, \end{aligned}$$

somit

$$\varphi(t) = A \cos 2t + \tilde{B} \sin 2t, \quad A, \tilde{B} \in \mathbb{R}.$$

Definition 2.21. Die Funktion

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - \xi)g(\xi)d\xi$$

heißt (endliche) *Faltung* der Funktionen f und g .

Es gelten folgende *Rechengesetze* für die Faltung:

1. $f * g = g * f$.
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$.
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Beispiel 2.37. $f(t) = t$, $g(t) = t$.

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t (t - \xi)\xi d\xi = \int_0^t (t\xi - \xi^2)d\xi = \left(\frac{t}{2}\xi^2 - \frac{\xi^3}{3}\right)\Big|_0^t = \frac{t^3}{6} \\ &\neq f(t) \cdot g(t) = (f \cdot g)(t). \end{aligned}$$

Satz 2.18 (Faltungssatz). Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\} &= \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} = F \cdot G \quad \text{mit} \quad F = \mathcal{L}\{f\}, G = \mathcal{L}\{g\}, \\ \mathcal{L}^{-1}\{F \cdot G\} &= f * g. \end{aligned}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \left(\int_0^t f(t - \xi)g(\xi)d\xi\right) dt = \int_{t=0}^\infty \int_{\xi=0}^t e^{-st} f(t - \xi)g(\xi) d\xi dt = \\ &= \int_{\xi=0}^\infty \int_{t=\xi}^\infty e^{-st} f(t - \xi)g(\xi) dt d\xi = \int_{\xi=0}^\infty g(\xi) \left(\int_{t=\xi}^\infty e^{-st} f(t - \xi) dt\right) d\xi = \\ &\quad \text{Subst: } t - \xi = \eta \\ &\quad \quad \quad dt = d\eta \\ &= \int_{\xi=0}^\infty g(\xi) \left(\int_{\eta=0}^\infty e^{-s(\eta+\xi)} f(\eta) d\eta\right) d\xi = \int_{\xi=0}^\infty g(\xi) e^{-s\xi} d\xi \cdot \int_{\eta=0}^\infty f(\eta) e^{-s\eta} d\eta \\ &= G(s) \cdot F(s) \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 2.38. Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'' - 3y' + 2y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

mit

$$f(t) = \mathcal{O}(e^{at}) \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Laplace-Transformieren der gesamten Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varphi'' - 3\varphi' + 2\varphi\} &= \mathcal{L}\{f\}, \\ s^2\Phi - 3s\Phi + 2\Phi &= F(s), \end{aligned}$$

somit

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2}$$

und

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) \cdot \frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\}.$$

Bekannt ist $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f$. Daraus folgt

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} \stackrel{\text{PBZ}}{=} e^{2t} - e^t = g(t),$$

d.h.

$$\varphi(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\xi)g(t-\xi)d\xi = \int_0^\infty f(\xi)(e^{2(t-\xi)} - e^{t-\xi})d\xi.$$

Definition 2.22. Zunächst definiert man für $\varepsilon > 0$, $h \gg 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, die Funktion

$$p(t) = \begin{cases} h & \text{für } |t-a| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |t-a| > \varepsilon. \end{cases}$$

Ihre LAPLACE-Transformierte lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{p(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}p(t)dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-st}hdt = -\frac{h}{s}e^{-st}\Big|_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \\ &= -\frac{h}{s}\left(e^{-s(a+\varepsilon)} - e^{-s(a-\varepsilon)}\right) = -\frac{h}{s}e^{-as}\underbrace{(e^{-s\varepsilon} - e^{s\varepsilon})}_{-2\sinh s\varepsilon} \\ &= \frac{2h}{s}\sinh s\varepsilon e^{-as}. \end{aligned}$$

Jetzt wählt man speziell $h = \frac{1}{2\varepsilon}$ und erhält für die Funktion

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{für } |t-a| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |t-a| > \varepsilon. \end{cases}$$

die Relation

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^\infty p_\varepsilon(t)dt = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}dt = 1.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich daraus die sogenannte DIRAC'sche δ -Funktion $\delta(t - a)$ mit den Eigenschaften

$$\delta(t - a) = 0 \quad \text{für } t \neq a, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1.$$

Ihre LAPLACE-Transformierte lautet

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{p_\varepsilon(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} e^{as} \sinh \varepsilon s = e^{-as}.$$

Speziell für $a = 0$ erhält man $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Beispiel 2.39. Betrachte

$$y'' + 2y' + 5y = \delta(t - 1), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Sei $\varphi(t)$ Lösung. Dann erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varphi(t)\} &= \Phi(s) \\ \mathcal{L}\{\varphi'(t)\} &= s\Phi(s) - \varphi(0) \\ \mathcal{L}\{\varphi''(t)\} &= s^2\Phi(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$s^2\Phi(s) + 2s\Phi(s) + 5\Phi(s) = e^{-s},$$

woraus

$$\Phi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2e^{-s}}{2((s + 1)^2 + 4)}$$

folgt. Wegen

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} = \sin \omega t, \quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(t - a)$$

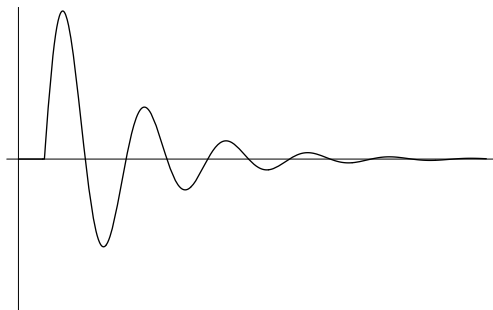
und

$$\mathcal{L}\{H(t - b)f(t - b)\} = e^{-bs}F(s)$$

folgt nun

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}H(t - 1)e^{-(t-1)} \sin 2(t - 1).$$

Diese Differentialgleichung beschreibt z.B. die Schwingung eines gedämpften Pendels, das für $0 \leq t < 1$ in Ruhe ist, zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ einen „Schlag“ bekommt und dann wieder ohne äußere Einwirkung gedämpft weiterschwingt.



Produkt einer beliebigen stetigen Funktion f mit der δ -Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\varepsilon}(t)f(t)dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}f(t)dt$$
$$\stackrel{\text{MWS}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{2\varepsilon}2\varepsilon f(t^*) = f(a).$$

2.7.1. Anwendung zum Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Mit Hilfe des Ableitungssatzes wird die DGL in eine algebraische Gleichung übergeführt, die in der Regel leichter zu lösen ist.

Beispiel 2.40. Gegeben sei das folgende AWP¹:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0 \\ \dot{y}(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

Zur Suche der Funktion $y(t)$ geht man dabei nach folgendem Schema vor:

1. Anwendung der LAPLACE-Transformation:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] - 2\mathcal{L}[\dot{y}] + 5\mathcal{L}[y] = 0$$

$$(s^2F(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) - 2(sF(s) - y(0)) + 5F(s) = 0$$

Nun berücksichtigt man noch die Anfangsbedingungen und erhält

$$(s^2 - 2s + 5)F(s) = s + 1 - 2$$

2. Lösen der algebraischen Gleichung in F :

$$F(s) = \frac{s - 1}{s^2 - 2s + 5}$$

3. Rücktransformation:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}F$$

Dazu zerlegt man den Lösungsterm in seine Partialbruchzerlegung (PBZ). Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind

$$s^2 - 2s + 5 = 0 \Rightarrow s = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm 2i$$

Der allgemeine Ansatz bei der PBZ lautet daher

$$\frac{s - 1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{A}{s - (1 + 2i)} + \frac{B}{s - (1 - 2i)}$$

Die Faktoren A und B können nach der Polmethode bestimmt werden², man erhält

$$A = B = \frac{1}{2}$$

¹Dieses AWP kann auch mit dem Exponentialansatz gelöst werden.

²Man setzt dazu $s = 1 + 2i$ bzw. $s = 1 - 2i$, sodass jeweils einer der Faktoren herausfällt. Siehe dazu auch MATHEMATIK I

Damit wird

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{s - (1 + 2i)} + \frac{1}{2} \frac{1}{s - (1 - 2i)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\underbrace{s - (1 + 2i)}_a} \right] + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\underbrace{s - (1 - 2i)}_{a'}} \right]$$

Aus der Tabelle entnimmt man

$$F(s) = \frac{1}{s - a} \Rightarrow y(t) = e^{at}$$

und erhält so

$$y(t) = \frac{e^{(1+2i)t} + e^{(1-2i)t}}{2}$$

Dieser Term wird mit Hilfe der EULER'schen Formel reell gemacht, die Lösung ist

$$y(t) = e^t \cos 2t.$$

Wiederholung: Partialbruchzerlegung Sei eine beliebige rationale Funktion $\frac{P(z)}{Q(z)}$ gegeben, wobei der Grad des Nenners größer als der Grad des Zählers sei. Sei ferner

$$Q(z) = (z - \sigma_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - \sigma_m)^{k_m}.$$

Dann ist

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(z - \sigma_i)^j}.$$

Beispiel 2.41. Gegeben sei die DGL

$$y''' - y'' + y - y = e^x$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Sei ferner $Y = \mathcal{L}[y]$. Die LAPLACE-Transformation ergibt

$$Ys^3 - Ys^2 + Ys - Y = \frac{1}{s - 1}$$

$$Y \cdot (s^3 - s^2 + s - 1) = \frac{1}{s - 1}$$

$$Y(s - 1)(s + i)(s - i) = \frac{1}{s - 1}$$

$$Y = \frac{1}{(s - 1)^2(s + i)(s - i)}$$

Der Ansatz für die PBZ ist

$$\frac{1}{(s-1)^2(s+i)(s-i)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-i} + \frac{D}{s+i}$$

$$1 = A(s-1)(s-i)(s+i) + B(s-i)(s+i) + C(s-1)^2(s+i) + D(s-1)^2(s-i)$$

Nun führt man einen Koeffizientenvergleich durch:

$$\begin{aligned} s^3 : A + 0 \cdot B + C + D &= 0 \\ s^2 : -A + B + (-2+i)C + (-2-i)D &= 0 \\ s : A + 0 \cdot B + (1-2i)C + (1+2i)D &= 0 \\ 1 : -A + B + iC + (-i)D &= 1 \end{aligned}$$

Damit erhält man sofort $A = -\frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$ (aus den Gleichungen 1 und 4). Durch Subtraktion der ersten und der dritten Gleichung erhält man

$$2iC - 2iD = 0 \Rightarrow C = D$$

und aus der Subtraktion von zweiter und vierter Gleichung

$$-2C - 2D = -1 \Rightarrow C = D = \frac{1}{4}$$

Damit wird

$$Y = \frac{1}{(s-1)^2(s-i)(s+i)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s-i)} + \frac{1}{4(s+i)}$$

Bis auf den zweiten Summenterm lassen sich alle sehr einfach berechnen, der zweite Summand kann über den Faltungssatz ermittelt werden:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-1} \right] = \int_0^x e^t e^{x-t} dt = \int_0^x e^x dt = e^x \int_0^x dt = x e^x$$

Damit wird

$$y = \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right]}_{-\frac{1}{2} e^x} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^2} \right]}_{x e^x} + \underbrace{\frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-i} \right]}_{\frac{1}{4} e^{ix}} + \underbrace{\frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+i} \right]}_{\frac{1}{4} e^{-ix}}$$

Zum Abschluss vereinigt man die letzten beiden Summanden wieder über den EULER'schen Satz und erhält das Ergebnis

$$y = \frac{1}{2}(x-1)e^x + \frac{1}{2} \cos x.$$

2.7.2. Anwendung auf Probleme bei partiellen Differentialgleichungen

Halbunendliche Saite mit äußerer Kraft $f(t)$, ein Ende fixiert, das andere frei.
Differentialgleichung:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x), \quad 0 < x < \infty, t > 0,$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

Randwerte:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u_x(x, t) &\rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Transformation von $u(x, t)$ bzgl. der Variablen t :

$$U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)].$$

Ferner gelte

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

Dann folgt mit

$$\mathcal{L}[u_{tt}] = s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) = s^2 U(x, s)$$

und

$$\mathcal{L}[c^2 u_{xx} + f(t)] = c^2 U_{xx} + F(s).$$

für $U(x, s)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$U_{xx} - \frac{s^2}{c^2} U = -\frac{1}{c^2} F(s)$$

mit der Lösung

$$U(x, s) = Ae^{\frac{sx}{c}} + Be^{-\frac{sx}{c}} + \frac{F(s)}{s^2}.$$

Transformation der Randwerte:

$$\begin{aligned} U(0, s) &= \int_0^\infty u(0, t) e^{-st} dt = 0, \\ U_x(x, s) &= \int_0^\infty u_x(x, t) e^{-st} dt \\ \lim_{x \rightarrow \infty} U_x(x, s) &= \int_0^\infty \lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, t) e^{-st} dt = 0. \end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Lösung ergibt sich damit

$$\begin{aligned} U(0, s) &= A + B + \frac{F(s)}{s^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} U_x(x, s) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{c} \left(Ae^{\frac{sx}{c}} - Be^{-\frac{sx}{c}} \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

somit $A = 0$ und $B = -\frac{F(s)}{s^2}$, also

$$U(x, s) = \frac{F(s)}{s^2} \left(1 - e^{-\frac{sx}{c}}\right).$$

Berechne nun die Lösung im Bildraum:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[F(s) \cdot \frac{1}{s^2} \right] &= f(t) * t = \int_0^t f(\xi)(t - \xi) d\xi \\ \mathcal{L}^{-1} \left[F(s) \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-\frac{x}{c}s} \right] &= \int_0^{t - \frac{x}{c}} f(\xi)(t - \frac{x}{c} - \xi) d\xi \cdot H\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ &= \begin{cases} \int_0^{t - \frac{x}{c}} f(\xi)(t - \frac{x}{c} - \xi) d\xi & \text{für } t > \frac{x}{c} \\ 0 & \text{für } t < \frac{x}{c} \end{cases}, \end{aligned}$$

also

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_0^t f(\xi)(t - \xi) d\xi - \int_0^{t - \frac{x}{c}} f(\xi)(t - \frac{x}{c} - \xi) d\xi & \text{für } t > \frac{x}{c} \\ \int_0^t f(\xi)(t - \xi) d\xi & \text{für } t < \frac{x}{c} \end{cases}.$$

3. Vektoranalysis im Raum

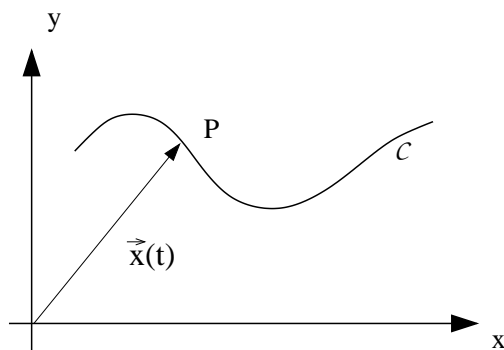
Zunächst werden einige bereits behandelte Begriffe wieder in Erinnerung gebracht.

3.1. Vektorielle Darstellung einer Kurve im Raum

Eine Kurve \mathcal{C} im Raum wird beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\mathcal{C}: \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I$$

Dabei sind $x(t), y(t), z(t)$ stetige Funktionen. Durchläuft die Variable (= der Parameter) t das Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so bewegt sich der Punkt P entlang der Kurve \mathcal{C} .



Beispiel 3.1. Ein Elektron bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

entlang einer Schraubenlinie mit dem Radius R . Die Koordinaten des Elektrons zu einem Zeitpunkt t sind

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(\omega t) \\ y(t) &= R \sin(\omega t) \\ z(t) &= h t \end{aligned}$$

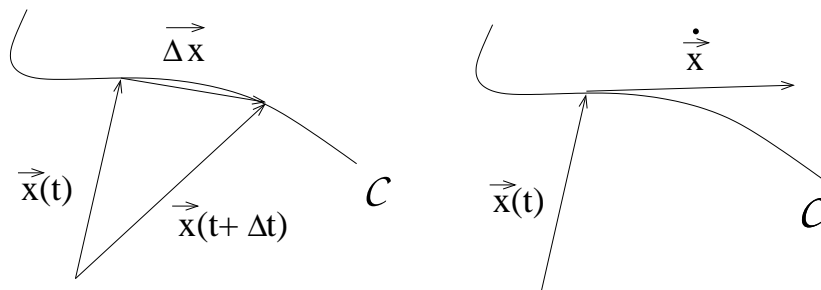
Dabei ist $\omega = \frac{e}{m} B_0$ und h die konstante Geschwindigkeitskomponente in z -Richtung.

3.2. Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

Ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ die Parameterdarstellung einer Kurve \mathcal{C} , so ist die **Ableitung des Vektors** $\dot{\vec{x}}$ definiert als Grenzwert

$$\dot{\vec{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t))$$

für $\Delta t \rightarrow 0$. Geometrisch entspricht dies dem Grenzübergang des Differenzvektors (= Sekantenvektors) in den Tangentenvektor im Punkt $\vec{x}(t)$. Man erhält



$$\frac{1}{\Delta t} (\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} (x(t + \Delta t) - x(t))/\Delta t \\ (y(t + \Delta t) - y(t))/\Delta t \\ (z(t + \Delta t) - z(t))/\Delta t \end{pmatrix} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} =: \dot{\vec{x}}(t).$$

D.h. die Differentiation eines Vektors $\vec{x}(t)$ nach dem Parameter t erfolgt komponentenweise.

Anwendung Ist $\vec{x}(t)$ der zeitabhängige Ortsvektor der Bahnkurve eines Massenpunktes, dann ist

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \dot{\vec{x}}(t) && \text{der Geschwindigkeitsvektor} \\ \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) && \text{der Beschleunigungsvektor} \end{aligned}$$

Beispiel 3.2. Elektron im Magnetfeld (siehe Bsp. 3.1)

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \\ h \end{pmatrix} \\ \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) &= \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

3.3. Vektor- oder Kraftfelder

Definition 3.1.

1. Eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x, y, z)$ heißt **skalares Feld** oder **Skalarfeld**.
Beispiele für Skalarfelder sind räumliche Temperaturprofile $T(x, y, z)$ oder Ladungsdichten $\rho(x, y, z)$.
2. Als **Vektorfeld** oder **Kraftfeld** bezeichnet man eine vektorwertige Funktion $\vec{K} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

\vec{K} weist jedem Punkt des Raumes einen Vektor zu.

Beispiele für Vektorfelder sind das Magnetfeld \vec{B} , das elektrische Feld \vec{E} , Kraftfelder oder Geschwindigkeitsfelder \vec{v} .

Beispiel 3.3. Die elektrische Kraft, welche eine Punktladung q_1 auf eine andere Punktladung q_2 ausübt, ist nach dem COULOMB'schen Gesetz gegeben durch

$$\vec{K} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3.4. Gradient, Divergenz, Rotation

Definition 3.2.

1. Sei $\Phi(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann heißt der Ausdruck

$$\text{grad } \Phi \equiv \nabla \Phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{pmatrix}$$

der **Gradient von Φ** .

Sei $\Phi(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann heißt der Ausdruck

$$\text{grad } \Phi \equiv \nabla \Phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix}$$

der **Gradient von Φ** .

2. Der Operator

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

heißt **Nabla-Operator**.

Der Nabla-Operator ist ein Vektor, der immer links von der zu differenzierenden Funktion steht. Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\Phi &= \nabla\Phi, \\ \operatorname{div}\vec{K} &= \nabla\vec{K}, \\ \operatorname{rot}\vec{K} &= \nabla \times \vec{K}.\end{aligned}$$

Definition 3.3.

1. Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld, dann heißt

$$\operatorname{div}\vec{K} \equiv \nabla \cdot \vec{K} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Divergenz von \vec{K} .

2. Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld, dann heißt

$$\operatorname{div}\vec{K} \equiv \nabla \cdot \vec{K} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergenz von \vec{K} .

Bemerkung. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist immer eine skalare Funktion.

Bemerkung. Ein Vektorfeld heißt **quellenfrei** (d.h. es existieren keine Quellen bzw. Senken), falls die Divergenz verschwindet.

- $\operatorname{div}\vec{K} > 0$... es existieren Quellen (Ausgangspunkt von Feldlinien)
- $\operatorname{div}\vec{K} < 0$... es existieren Senken (Feldlinien verschwinden)

Definition 3.4. Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld im \mathbb{R}^3 , dann heißt

$$\operatorname{rot}\vec{K} := \nabla \times \vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$$

Rotation von \vec{K} .

Ein Vektorfeld \vec{K} dessen Rotation gleich dem Nullvektor $\vec{0}$ ist, heißt **wirbelfrei**.

Zusammenfassung:

- $\text{grad}\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \Phi_x(x, y, z) \\ \Phi_y(x, y, z) \\ \Phi_z(x, y, z) \end{pmatrix}$ heisst **Gradient** von $\Phi(x, y, z)$.

Der Gradient ist ein Vektorfeld.

- $\text{div}\vec{K} = P_x(x, y, z) + Q_y(x, y, z) + R_z(x, y, z)$ ist die **Divergenz** eines Vektorfeldes \vec{K} .

Die Divergenz ist ein skalares Feld.

- $\text{rot}\vec{K} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$ ist die **Rotation** des Vektorfeldes \vec{K} .

Die Rotation ist ein Vektorfeld.

3.5. Rechnen mit Differentialoperatoren

Es sollen einige wichtige Begriffe für skalare Felder und für Vektorfelder zusammengestellt werden.

Definition 3.5. Ein Vektorfeld \vec{K} heißt **Potentialfeld** oder **Gradientenfeld** wenn es eine Funktion Φ gibt mit $\vec{K} = \text{grad}\Phi$. Φ heißt dann das **skalare Potential**.

Direkt prüft man nach, dass stets gilt:

$$\nabla(\nabla \times \vec{K}) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times (\nabla\Phi) = \vec{0}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot}\vec{K}) &= 0, \\ \text{rot}(\text{grad}\Phi) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Konsequenzen aus der Quellenfreiheit ($\text{div}\vec{K} = 0$) und aus der Wirbelfreiheit ($\text{rot}\vec{K} = \vec{0}$) eines Vektorfeldes:

Satz 3.1.

1. Das Vektorfeld \vec{K} ist genau dann wirbelfrei, wenn es ein skalares Feld Φ gibt mit $\vec{K} = \text{grad}\Phi$. Man nennt Φ dann **skalares Potential**.

$$\text{Es gibt ein } \Phi \text{ mit } \vec{K} = \text{grad}\Phi \iff \text{rot}\vec{K} = \vec{0}$$

2. Das Vektorfeld \vec{K} ist genau dann quellenfrei, wenn es ein Vektorfeld \vec{A} gibt mit $\vec{K} = \text{rot}\vec{A}$. Man nennt \vec{A} dann ein **Vektorpotential**.

Es gibt ein \vec{A} mit $\vec{K} = \text{rot}\vec{A} \iff \text{div}\vec{K} = 0$

Beispiel 3.4. Gegeben ist das skalare Potential

$$\Phi(x, y, z) = \arctan \frac{x}{y}, \quad x \geq 0$$

Das dazugehörige Vektorfeld \vec{K} lautet:

$$\vec{K} = \text{grad}\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da \vec{K} ein Potentialfeld ist, gilt $\text{rot}\vec{K} = \vec{0}$.

Die Divergenz von \vec{K} ist $\text{div}\vec{K} = 0$. D.h. das Vektorfeld ist sowohl wirbel- als auch quellenfrei. Weiters gilt

$$\text{div}\vec{K} = \text{div grad}\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$$

Man nennt Δ mit

$$\Delta\Phi := \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}$$

den **LAPLACE-Operator**. Er spielt in der Elektrostatik eine große Rolle, da alle elektrostatischen Probleme durch die Differentialgleichung (POISSON-Gleichung)

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

modelliert werden.

Beispiel 3.5. Das Kraftfeld

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ x^2yz^2 \end{pmatrix}$$

besitzt wegen

$$\text{rot}\vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & xz & x^2yz^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x^2z^2 - x \\ -2xyz^2 \\ z - x \end{pmatrix}$$

keine Potentialfunktion.

Beispiel 3.6. Das Kraftfeld

$$\vec{K}(\vec{x}) = c \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ist ein zentrales Kraftfeld (vgl. Definition 4.3 und Beispiele (4.6) und (4.7)). Man rechnet nach, dass

$$\text{rot}\vec{K} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \text{div}\vec{K} = 0$$

d.h. \vec{K} ist ein Gradientenfeld.
 Das zugehörige Potential ist

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \text{const.}$$

Es gilt weiters

$$\text{div} \vec{K} = \text{div}(\text{grad} \Phi) = \Delta \Phi = 0$$

d.h. die Funktion Φ ist eine Lösung der LAPLACE-Gleichung.

Beispiel 3.7. Gegeben ist eine zähe Flüssigkeit, die durch ein Rohr mit dem Radius R in y -Richtung fließt.

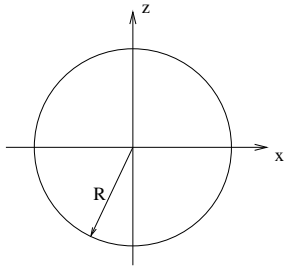


Abbildung 3.1.: Rohrquerschnitt

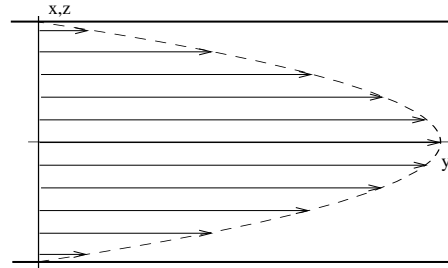


Abbildung 3.2.: Geschwindigkeitsfeld

Der Geschwindigkeitsvektor ist nach dem Gesetz von HAGEN-POISEUILLE

$$\vec{v} = c \begin{pmatrix} 0 \\ R^2 - x^2 - z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad \text{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} 2cz \\ 0 \\ -2cx \end{pmatrix}$$

D.h. das Geschwindigkeitsfeld hat keine Quellen ($\text{div} \vec{v} = 0$), besitzt aber eine Zirkulation in der xz -Ebene.

4. Kurvenintegrale im Raum

4.1. Definition

Bewegt man einen Körper in einem Kraftfeld

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

so ist die dabei verrichtete Arbeit gleich dem Produkt *Kraft · Weg*.

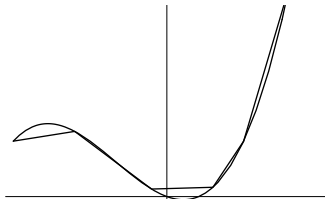
Wir betrachten eine (orientierte) Raumkurve

$$\mathcal{C} : \vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_1,$$

mit dem Anfangspunkt $P_0 \equiv \vec{P}_0 := \vec{x}(\tau_0)$ und dem Endpunkt $P_1 \equiv \vec{P}_1 := \vec{x}(\tau_1)$.

Nun approximiert man die Kurve \mathcal{C} durch einen Polygonzug von N Strecken, d.h. man unterteilt das Intervall $[\tau_0, \tau_1]$ in N Teilintervalle:

$$\tau_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \tau_1$$



Die entlang der Strecke von \vec{x}_i nach \vec{x}_{i+1} mit $\vec{x}_i := \vec{x}(t_i)$ verrichtete Arbeit ist nun gleich

$$W_i = \vec{K}(\vec{x}_i) \cdot \Delta\vec{x}_i \quad \text{mit} \quad \Delta\vec{x}_i = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i.$$

Die von P_0 nach P_1 verrichtete Arbeit wird dann approximiert durch

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} \left(\vec{K}(\vec{x}_i) \cdot \Delta\vec{x}_i \right) = \sum_{i=0}^{N-1} (P(\vec{x}(t_i))\Delta x_i + Q(\vec{x}(t_i))\Delta y_i + R(\vec{x}(t_i))\Delta z_i)$$

Mit $\dot{x}(t_i) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$, $\dot{y}(t_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}$, $\dot{z}(t_i) \approx \frac{\Delta z_i}{\Delta t_i}$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ folgt

$$W \approx \sum_{i=0}^{N-1} (P(\vec{x}(t_i))\dot{x}(t_i) + Q(\vec{x}(t_i))\dot{y}(t_i) + R(\vec{x}(t_i))\dot{z}(t_i)) \Delta t_i$$

Geht man bei dieser RIEMANN'schen Summe mit der Feinheit der Zerlegung gegen Null ($\Delta t_i \rightarrow 0$ für alle i), so erhält man das Integral

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + R(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \right) dt =: \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy + R dz \end{aligned}$$

Definition 4.1. Das Integral

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt = \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy + R dz \equiv \int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x}$$

wird als **Kurvenintegral** bzw. **Linienintegral** des Vektorfeldes \vec{K} entlang der Kurve \mathcal{C} bezeichnet.

Bemerkung.

- Der Wert des Integrals hängt i.A. nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab, sondern auch vom vorgegebenen Weg.
- $\vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)$ ist die Kraft, die tangential auf die Kurve wirkt, da $\dot{\vec{x}}(t)$ in jedem Punkt \vec{x} der Kurve \mathcal{C} in Richtung der Tangente weist.
- Für ein Kurvenintegral entlang einer geschlossenen Kurve verwendet man das Symbol

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x}$$

Die Berechnung von Kurvenintegralen erfolgt in 3 Schritten:

- Parameterdarstellung der Kurve \mathcal{C} : $\vec{x} = \vec{x}(t)$
- Berechnung von $\dot{\vec{x}}(t)$
- Die Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ in die Komponenten P, Q, R von \vec{K} einsetzen, das Skalarprodukt $\vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)$ berechnen und die Integration ausführen.

Beispiel 4.1. Betrachte

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x - z \\ xyz \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} , einen Parabelbogen $y = x^2$ in der Ebene $z = 2$ von $A(0, 0, 2)$ nach $B(1, 1, 2)$, d.h.

$$\mathcal{C}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$W = \int_0^1 \left(\underbrace{\begin{pmatrix} t^2 \cdot t^2 \\ t - 2 \\ t \cdot t^2 \cdot 2 \end{pmatrix}}_{\vec{K}(\vec{x}(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dot{\vec{x}}(t)} \right) dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^2 - 4t) dt = \frac{17}{15}$$

Beispiel 4.2.

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\int_{\mathcal{C}} x dx + y dy + z dz = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

Bemerkung. In diesem Fall wird entlang einer geschlossenen Kurve \mathcal{C} keine Arbeit verrichtet.

Analog definiert man ein Linienintegral in der Ebene: Man betrachtet eine ebene Kurve \mathcal{C} in Parameterdarstellung

$$\mathcal{C} : \vec{x} = \vec{x}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

und ein Feld

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

Dann heißt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} \equiv \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy := \int_{t_0}^{t_1} \vec{K}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt$$

Linienintegral von \vec{K} in der Ebene entlang der Kurve \mathcal{C} .

Beispiel 4.3. Man bestimme die Arbeit, die das Kraftfeld $\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}$ bei der Bewegung eines Teilchens entlang des Viertelkreises

$$\mathcal{C} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2,$$

leistet.

Mit $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} &= \int_{t=0}^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ -\sin t \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} (-2) \sin t \cos^2 t dt \\ &= \frac{2}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Die Arbeit ist negativ, da das Kraftfeld die Bewegung entlang der Kurve behindert.

Beispiel 4.4. Man berechne $\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x dy$, wobei

- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ die Strecke von $P(-5, -3)$ nach $Q(0, 2)$ ist;
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$ der Parabelbogen $x = 4 - y^2$ von $P(-5, -3)$ nach $Q(0, 2)$ ist.

zu a) $\mathcal{C}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t - 5 \\ 5t - 3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x dy &= \int_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} (5t-3)^2 \\ 5t-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} dt \\ &= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

zu b) $\mathcal{C}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 - t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad -3 \leq t \leq 2, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_2} y^2 dx + x dy &= \int_{\mathcal{C}_2} \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_{-3}^2 \begin{pmatrix} t^2 \\ 4 - t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-3}^2 (-2t^3 - t^2 + 4) dt = 40\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Man bekommt verschiedene Werte für das Linienintegral, obwohl Anfangs- und Endpunkt identisch sind.

4.2. Eigenschaften

Bemerkung. Für gewöhnliche Integrale gelten die folgenden Relationen (siehe Mathematik A):

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Kurvenintegrale besitzen entsprechende Eigenschaften:

- Wählen wir einen Punkt P auf der Kurve \mathcal{C} , so teilt dieser \mathcal{C} in zwei Kurven \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 (siehe Abb. 4.1). Wir schreiben $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{K} d\vec{x} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{K} d\vec{x}$$

- Bezeichnet nun \mathcal{C} die (orientierte) Raumkurve von A nach B und $-\mathcal{C}$ die im entgegengesetzten Sinn von B nach A durchlaufene Kurve (siehe Abb. 4.2). Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} = - \int_{-\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x}$$

- Man betrachtet nun zwei orientierte Raumkurven \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 , die beide von A nach B laufen und dann die geschlossene Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + (-\mathcal{C}_2)$, die von A über B wieder nach A zurückläuft (siehe Abb. 4.3). Gilt

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} = 0 \tag{4.1}$$

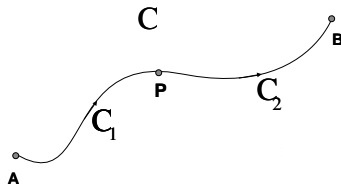


Abbildung 4.1.: $C_1 + C_2$

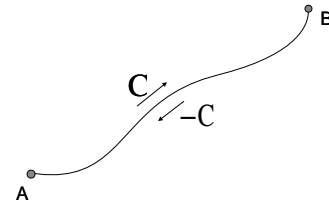


Abbildung 4.2.: $-C$

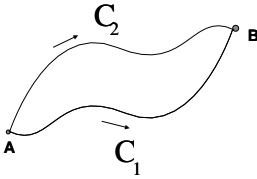


Abbildung 4.3.: geschlossen

so erhält man

$$\oint_C \vec{K} d\vec{x} = \int_{C_1} \vec{K} d\vec{x} + \int_{-C_2} \vec{K} d\vec{x} = \int_{C_1} \vec{K} d\vec{x} - \int_{C_2} \vec{K} d\vec{x} = 0$$

Daraus folgt

$$\int_{C_1} \vec{K} d\vec{x} = \int_{C_2} \vec{K} d\vec{x}$$

D.h. der Wert des Linienintegrals von A nach B ist unter der Voraussetzung (4.1) vom gewählten Weg unabhängig.

4.3. Gradientenfelder und Kurvenintegrale

In der Regel ist das Kurvenintegral wegababhängig. Für spezielle Vektorfelder ist es jedoch wegunabhängig.

Definition 4.2. Ein Vektorfeld $\vec{K}(x, y, z)$ heißt **Gradientenfeld** oder **Potentialfeld**, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{K}(x, y, z) = \text{grad}\Phi(x, y, z)$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, z), \\ Q(x, y, z) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, z), \\ R(x, y, z) &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

Die Funktion $\Phi(x, y, z)$ heißt eine zu \vec{K} gehörende **Potentialfunktion**.

Bemerkung.

1. Zwei zu \vec{K} gehörende Potentialfunktionen unterscheiden sich höchstens um eine additive Konstante.
2. In der Physik bezeichnet man Kraftfelder, die eine zugehörige Potentialfunktion besitzen, als **konservative Kraftfelder**.
3. Die Gradientenfelder sind diejenigen Vektorfelder, für welche die Kurvenintegrale immer wegunabhängig sind.

Es gilt:

Satz 4.1 (Hauptsatz über Kurvenintegrale).

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein achsenparalleler Quader und $\vec{K} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit stetigen partiellen Ableitungen. Dann sind folgende Aussagen gleichbedeutend:

1. \vec{K} ist ein Gradientenfeld
2. In G gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \iff \quad \text{rot } \vec{K} = \vec{0}$$

3. Der Wert des Kurvenintegrals $\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x}$ hängt für alle in G verlaufenden Kurven \mathcal{C} nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.
4. Das Kurvenintegral $\oint_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x}$ ist für alle in G verlaufenden, geschlossenen Kurven \mathcal{C} stets Null.

Bemerkung. Im Fall eines zweidimensionalen Vektorfeldes $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ lautet die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Berechnung des Kurvenintegrals im Fall eines Gradientenfeldes Sei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \text{grad}\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \Phi_x(x, y, z) \\ \Phi_y(x, y, z) \\ \Phi_z(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Das totale Differential von Φ lautet

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz \\ &= P dx + Q dy + R dz \\ &= \vec{K} \cdot d\vec{x}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} &= \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi}{dt} dt = \Phi(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \Phi(t_1) - \Phi(t_0) \\ &= \Phi \Big|_{\text{Endpunkt von } \mathcal{C}} - \Phi \Big|_{\text{Anfangspunkt von } \mathcal{C}}.\end{aligned}$$

Satz 4.2 (Integration eines Gradientenfeldes).

Ist \vec{K} ein Gradientenfeld mit dem Potential Φ , d.h. $\vec{K} = \text{grad}\Phi$, und \mathcal{C} eine von P_1 nach P_2 verlaufende Kurve. Dann ist

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} = \Phi \Big|_{P_2} - \Phi \Big|_{P_1}$$

Folgerung: Das Linienintegral entlang einer geschlossenen Kurve ist für ein Gradientenfeld \vec{K} stets Null:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} = \Phi \Big|_{P_1} - \Phi \Big|_{P_1} = 0$$

Beispiel 4.5. Das Vektorfeld

$$\vec{K}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix}$$

ist ein Gradientenfeld, denn es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$$

Daher gibt es eine Potentialfunktion $\Phi(x, y)$ mit

$$\Phi_x = 3x^2y, \quad \Phi_y = x^3$$

Integriert man die erste Gleichung nach x , so folgt

$$\Phi(x, y) = x^3y + \varphi(y)$$

mit einer "Integrationskonstanten", die von y abhängen kann. Mit der zweiten Gleichung folgt dann

$$\begin{aligned}\Phi_y(x, y) &= x^3 + \varphi'(y) \stackrel{!}{=} x^3 \\ \implies \varphi'(y) &= 0 \implies \varphi(y) = C = \text{const.} \\ \implies \Phi(x, y) &= x^3y + C\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral von \vec{K} entlang einer Kurve \mathcal{C} mit dem Anfangspunkt $P_0(x_0, y_0)$ und dem Endpunkt $P_1(x_1, y_1)$ ist daher

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}} d\Phi = \Phi \Big|_{P_0}^{P_1} = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) = x_1^3y_1 - x_0^3y_0$$

Definition 4.3. Ein Kraftfeld \vec{K} heißt **radialsymmetrisch** (= **zentrales Kraftfeld**), wenn der Betrag von \vec{K} nur vom Abstand $r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängt und der Vektor \vec{K} in jedem Punkt radial nach außen zeigt:

$$\vec{K}(\vec{x}) = f(r) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} f(r) x \\ f(r) y \\ f(r) z \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.6.

$$\text{a) } \vec{K}(\vec{x}) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{x} \quad \text{Gravitationskraft}$$

$$\text{b) } \vec{K}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{x} \quad \text{Coulombkraft}$$

Behauptung. Alle radialsymmetrischen Kraftfelder sind Potentialfelder.

Beweis: Mit $P = f(r) x$, $Q = f(r) y$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= x f'(r) \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f'(r) \frac{xy}{r} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= y f'(r) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f'(r) \frac{xy}{r} \\ &\implies P_y = Q_x \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass die übrigen Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

Beispiel 4.7. Die zu den Kraftfeldern von Bsp. 4.6 gehörenden Potentialfunktionen sind

$$\text{a) } \Phi(x, y, z) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{Gravitationspotential}$$

$$\text{b) } \Phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{elektrostatisches Potential}$$

Beispiel 4.8. Ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} E_1(x, y, z) \\ E_2(x, y, z) \\ E_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

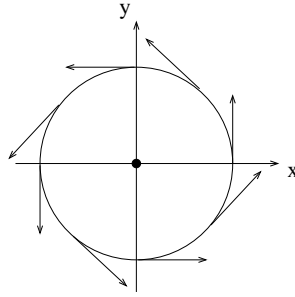
ein elektrostatische Feld, so gibt das Kurvenintegral

$$U = \int_{\mathcal{C}} \vec{E} \, d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}} E_1 \, dx + E_2 \, dy + E_3 \, dz$$

die Potentialdifferenz, d.h. die Spannung zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve \mathcal{C} an.

Beispiel 4.9 (Magnetfeld eines geraden Leiters). Ein homogener in z -Richtung liegender, stromdurchflossener Draht erzeugt in der xy -Ebene ein Magnetfeld proportional zu $\frac{1}{r}$, dessen Richtung tangential zu den Kreislinien $x^2 + y^2 = R^2$ ist:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$



also

$$\frac{\partial B_1}{\partial y} = \frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Daher ist \vec{B} ein konservatives Kraftfeld.

Wir berechnen nun noch das Kurvenintegral entlang eines Kreises mit dem Radius R um den Ursprung $(0, 0)$:

$$\text{Kreislinie } \mathcal{C} : \vec{x}(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \dot{\vec{x}}(t) = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} d\vec{x} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{x^2(t) + y^2(t)}}_{R^2} \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \mu_0 I \neq 0 \quad (!!)$$

Begründung: Im Ursprung wird das Feld \vec{B} singularär!

Entlang jeder geschlossenen Kurve, die den Ursprung *nicht* enthält, ist das Kurvenintegral stets Null.

5. Oberflächenintegrale

5.1. Flächen im Raum

Eine Kurve \mathcal{C} im \mathbb{R}^3 wird beschrieben durch eine Parameterdarstellung mit *einem* Parameter

$$\mathcal{C} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Eine (gekrümmte) Fläche im \mathbb{R}^3 wird beschrieben durch eine Parameterdarstellung mit *zwei* Parametern:

Definition 5.1. Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ ein Bereich in der Ebene (z.B. Rechteck) in dem die Variablen (= Parameter) (u, v) variieren, d.h. $(u, v) \in S$ (z.B. $u_1(v) \leq u \leq u_2(v), v_1 \leq v \leq v_2$). Eine **Fläche** $F \subset \mathbb{R}^3$ wird definiert durch die Parameterdarstellung

$$F : \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

wenn x, y, z (stetige, partiell differenzierbare) Funktionen der beiden Variablen (u, v) sind. Beim Durchlaufen aller (u, v) -Werte bewegt sich der Punkt, zu dem der Vektor $\vec{x}(u, v)$ weist, auf der Fläche F .

Die **Tangentialebene an die Fläche** F im Punkt P wird von den Richtungsvektoren

$$\vec{x}_u = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} x_u(u, v) \\ y_u(u, v) \\ z_u(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} x_v(u, v) \\ y_v(u, v) \\ z_v(u, v) \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

Der Normalvektor der Tangentialebene und damit der **Normalvektor der Fläche** F ist dann gegeben durch

$$\vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

Beispiel 5.1. Eine Ebene E im \mathbb{R}^3 wird durch die drei Punkte P_0, P_1, P_2 aufgespannt. Mit den Bezeichnungen

$$\vec{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}, \quad \vec{x}_1 = \overrightarrow{OP_1}, \quad \vec{x}_2 = \overrightarrow{OP_2}$$

kann dann diese Ebene angegeben werden in der Parameterform

$$E : \vec{x}(u, v) = \vec{x}_0 + u \vec{x}_1 + v \vec{x}_2$$

Beispiel 5.2. Eine Kugelfläche mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Ursprung hat mit den Kugelkoordinaten $u = \varphi, v = \theta$ die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} R \cos u \sin v \\ R \sin u \sin v \\ R \cos v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq \pi \end{array} \quad (5.1)$$

Der **Flächeninhalt** \mathcal{O} des Flächenstücks

$$F : \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in S$$

ist dann gegeben durch

$$\mathcal{O} = \iint_F dF = \iint_S |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| du dv$$

Beispiel 5.3. Oberfläche der Halbkugel mit dem Radius R .

Aus der Darstellung (5.1) folgt

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} -R \sin u \sin v \\ R \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -R \cos u \cos v \\ R \sin u \cos v \\ -R \sin v \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = -R^2 \sin v \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = R^2 \sin v$$

Damit folgt

$$\mathcal{O} = \iint_F dF = \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi/2} R^2 \sin v dv du = 2\pi R^2$$

5.2. Oberflächenintegrale

Definition 5.2. Sei $\vec{K} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld im Raum und F ein Flächenstück

in der expliziten Darstellung

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in B$$

oder in Parameterform

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v), \quad (u, v) \in S$$

mit dem Normalvektor \vec{n} gegeben durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v.$$

Dann heißt das Integral

$$\begin{aligned} \iint_F (\vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA &:= \iint_B (\vec{K}(\vec{x}) \cdot \vec{n}) \, dx \, dy \\ &= \iint_S (\vec{K}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_v)) \, du \, dv \end{aligned}$$

Oberflächenintegral von \vec{K} über F .

Dabei bezeichnet B den Bereich der Projektion des Flächenstücks F in die xy -Ebene, S bezeichnet den Parameterbereich von (u, v) .

Schreibweise: Man schreibt für das Oberflächenintegral auch

$$\iint_F \vec{K} \, d\vec{A} := \iint_F (\vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Physikalische Interpretation \vec{K} sei ein stationäres Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. Dann beschreibt

$$\iint_F (\vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA$$

den Fluss durch F , d.h. das Flüssigkeitsvolumen, das in einer Zeiteinheit durch die Fläche F fließt.

Beispiel 5.4. Betrachte

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z \end{pmatrix}$$

auf dem Bereich F der Ebene $z = x + y + 1$, der über dem Quadrat $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, liegt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_F (\vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA &= \iint_B \left(\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) dx \, dy \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (-x^2 - y^2 + x + y + 1) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(-x^2 - \frac{1}{3} + x + \frac{1}{2} + 1 \right) dx = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.5. Gegeben ist das Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums

$$\vec{K}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

das durch die Halbkugeloberfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z > 0$$

nach oben fließt. Welche Masse fließt pro Zeiteinheit durch dieses Flächenstück?

Wir verwenden wie in Bsp. 5.2 Kugelkoordinaten für die Parameterdarstellung der Halbsphäre:

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} R \cos u \sin v \\ R \sin u \sin v \\ R \cos v \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Der in Richtung der positiven z -Achse gerichtete Normalvektor ist

$$\begin{aligned} \vec{n} &= -(\vec{x}_u \times \vec{x}_v) = R^2 \sin v \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \\ \implies \vec{K}(\vec{x}) \cdot \vec{n} &= R^3 \sin v \end{aligned}$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} \iint_F (\vec{K}(\vec{x}) \cdot \vec{n}) dA &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi/2} \vec{K}(\vec{x}(u, v)) \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) du dv \\ &= R^3 \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{\pi/2} \sin v du dv \\ &= 2\pi R^3 \end{aligned}$$

Beispiel 5.6. Magnetischer Fluss

Der magnetische Fluss Φ des Magnetfeldes \vec{B} durch die Fläche F ist gegeben durch

$$\Phi = \iint_F (\vec{B} \cdot \vec{n}) dA$$

Speziell für das Magnetfeld

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(siehe Bsp. 4.9) ist der magnetische Fluss durch die Kreisfläche $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$ gesucht.

Wegen $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $(\vec{B} \cdot \vec{n}) = 0$. Damit ist der gesuchte magnetische Fluss gleich Null.

Beispiel 5.7. Betrachte

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ 3z \end{pmatrix} \quad \text{auf} \quad F : \vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{4}uv \end{pmatrix}, \quad |u| \leq 1, |v| \leq 1.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{x}_u &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{v}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{u}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\frac{v}{4} \\ -\frac{u}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ I &= \int_{u=-1}^1 \int_{v=-1}^1 \left(\begin{pmatrix} 2u \\ -v \\ \frac{3}{4}uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{v}{4} \\ -\frac{u}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right) du dv = \int_{u=-1}^1 \int_{v=-1}^1 \frac{uv}{2} du dv = 0. \end{aligned}$$

6. Integralsätze

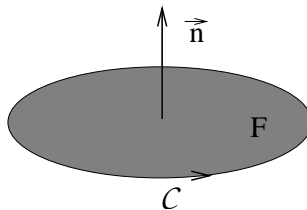
6.1. Satz von STOKES

Der Satz von Stokes stellt einen Zusammenhang her zwischen Kurvenintegralen (über geschlossene Kurven) und Oberflächenintegralen.

Satz 6.1. Sei \vec{K} ein Vektorfeld, F ein Flächenstück im Raum und $\mathcal{C} = \partial F$ der Rand von F . Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}=\partial F} \vec{K} d\vec{x} = \iint_F (\text{rot}\vec{K} \cdot \vec{n}) dA.$$

Die Orientierung von \mathcal{C} und die Flächennormale \vec{n} bilden dabei eine Rechtsschraube.



Physikalische Interpretation Die physikalische Arbeit entlang einer geschlossenen Kurve \mathcal{C} ist gleich dem Fluss des zugehörigen Wirbelfeldes durch ein Flächenstück mit dem Rand \mathcal{C} .

Beispiel 6.1. Betrachte

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und F , die obere Halbsphäre mit Radius $R = 1$.

1. Berechnung des Oberflächenintegrals:

Parameterdarstellung des Flächenstücks:

$$F : \begin{matrix} x = \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \cos \vartheta \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{matrix}$$

$$\text{rot}\vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\implies \iint_F (\operatorname{rot} \vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA = \iint_F (\vec{0} \cdot \vec{n}) \, dA = 0$$

2. Berechnung des Linienintegrals:

Parameterdarstellung der Kurve:

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \\ \mathcal{C} : y &= \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K} \, d\vec{x} = 0 \quad (\text{siehe Bsp. 4.2})$$

Bemerkung. Ist $\operatorname{rot} \vec{K} = \vec{0}$, dann ist das Oberflächenintegral stets Null, daher auch das entsprechende Kurvenintegral. Daher hängt der Wert des Kurvenintegrals *nicht* von der Gestalt der Kurve ab.

Ist also ein Feld \vec{K} wirbelfrei, d.h. es ist ein Gradientenfeld ($\operatorname{rot} \vec{K} = \vec{0}$), so ist das Kurvenintegral über \vec{K} wegunabhängig.

6.2. Satz von GAUSS

Dieser Satz liefert einen Zusammenhang zwischen einem Oberflächenintegral und einem Dreifachintegral.

Satz 6.2. Sei B ein dreidimensionaler Bereich mit der Randfläche $F = \partial B$ (= geschlossene Fläche) und \vec{K} ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\iint_F (\vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA = \iiint_B \operatorname{div} \vec{K} \, dV$$

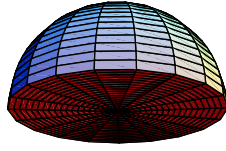
Dabei muss der Normalvektor \vec{n} auf die Fläche F *nach außen* orientiert sein.

Beispiel 6.2. Sei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B \dots \text{Obere Halbkugel mit Radius } R = 1.$$

1. Berechnung des Dreifachintegrals: Wegen $\operatorname{div} \vec{K} = 3$ folgt

$$\begin{aligned} \iiint_B \operatorname{div} \vec{K} \, dV &= \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} 3r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = 3 \cdot \iiint_B dV = 3 \cdot V_{\text{Halbkugel}} \\ &= 3 \frac{2\pi}{3} = 2\pi. \end{aligned}$$



2. Berechnung des Oberflächenintegrals:

$$\iint_F (\vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA = \iint_{F_1} (\vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA + \iint_{F_2} (\vec{K} \cdot \vec{n}) \, dA$$

F_1 ... obere Halbsphäre

F_2 ... Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$

a) Integral über F_1 :

$$F_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \end{array}$$

$$\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta = \dots = - \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin^2 \vartheta \\ \sin \varphi \sin^2 \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Da \vec{n} nach außen orientiert sein muss, muss die dritte Komponente des Normalvektors > 0 sein! Man muss für \vec{n} also $-(\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta)$ nehmen:

$$(\vec{K} \cdot \vec{n}) = \left(\begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin^2 \vartheta \\ \sin \varphi \sin^2 \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} \right) = \dots = \sin \vartheta$$

$$I_1 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = 2\pi (-\cos \vartheta) \Big|_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

b) Integral über F_2 :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}$$

$$\vec{x}_r \times \vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

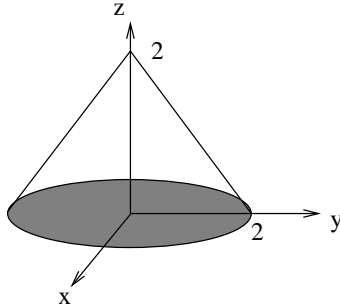
$$\Rightarrow (\vec{K} \cdot \vec{n}) = \left(\begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad I = I_1 + I_2 = 2\pi.$$

Beispiel 6.3. Gegeben sei das elektrische Feld

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} x - z \\ x^3 + yz \\ y - 3 \end{pmatrix}.$$

Man berechne den elektrischen Fluss durch die Oberfläche des Kegels mit der Höhe $h = 2$ und dem Radius $R = 2$.



$$\Phi = \iint_F \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA = \iiint_B \operatorname{div} \vec{E} \, dV$$

Es gilt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(x - z) + \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + yz) + \frac{\partial}{\partial z}(y - 3) = 1 + z$$

Mit den Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

ergeben sich für den Volumsbereich B die Grenzen

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2 - r, \quad 0 \leq r \leq 2$$

Damit folgt

$$\Phi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=0}^{2-r} (1 + z) r \, dr \, d\varphi \, dz = 4\pi.$$

Beispiel 6.4. Sei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix},$$

F ... Oberfläche des Zylinders $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq b, a, b \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen das Oberflächenintegral $I = \iint_F \vec{K} \cdot \vec{n} \, dA$ unter Verwendung des Satzes von Gauß:

$$\operatorname{div} \vec{K} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$$

Zylinder:

$$\begin{aligned} -a &\leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - x^2} &\leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \\ 0 &\leq z \leq b \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & 0 &\leq r \leq a \\ y &= r \sin \varphi & 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ z &= z & 0 &\leq z \leq b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_B \operatorname{div} \vec{K} \, dV = \int_{r=0}^a \int_{z=0}^b \int_{\varphi=0}^{2\pi} 5r^2 \cos^2 \varphi \, r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= 5b \frac{a^4}{4} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{5a^4 b}{4} \pi \end{aligned}$$

Beispiel 6.5. Die Gesamtladung Q in einem räumlichen Bereich B mit der Randfläche F ist bei einer Ladungsdichte $\varrho(x, y, z)$ gegeben durch

$$Q = \iiint_B \varrho(x, y, z) \, dV$$

Der elektrische Fluss durch die Oberfläche F entspricht bis auf eine Konstante ε_0 der im Gebiet B eingeschlossenen Ladung

$$Q = \varepsilon_0 \iint_F (\vec{E} \cdot \vec{n}) \, dA = \iiint_B \varrho(x, y, z) \, dV \quad (6.1)$$

Nach dem GAUSS'schen Satz gilt aber für das Oberflächenintegral

$$\iint_F (\vec{E} \cdot \vec{n}) \, dA = \iiint_B \operatorname{div} \vec{E} \, dV \quad (6.2)$$

Wegen der Gleichheit der Integranden in (6.1) und (6.2) für jeden Bereich B folgt mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung die Gleichheit der Integranden:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \varrho$$

Die Quellen des elektrischen Feldes stellen die Ladungsdichten dar.

Bemerkung. Da es keine magnetische Ladung gibt, gilt für das Magnetfeld stets

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

6.3. Satz von GREEN

(Spezialfall des Satzes von STOKES für die Ebene)

Die ebene, geschlossene Kurve \mathcal{C} sei positiv orientiert, der von \mathcal{C} eingeschlossene Bereich sei \mathcal{D} , die Funktionen P und Q seien in \mathcal{D} stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

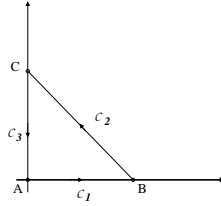
Beispiel 6.6. Man berechne

$$\int_C x^4 dx + xy dy$$

wobei C der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ und $C(0, 1)$ ist.

a) Direkt:

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 + C_3, \\ I &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$



- $I_1 = \int_{C_1} x^4 dx + xy dy; \quad C_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$I_1 = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{5}$$

- $I_2 = \int_{C_2} x^4 dx + xy dy; \quad C_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$I_2 = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^4 \\ (1-t) \cdot t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-t^4 + 4t^3 - 7t^2 + 5t - 1) dt = -\frac{1}{30}$$

- $I_3 = \int_{C_3} x^4 dx + xy dy, \quad C_3 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$I_3 = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0$$

Insgesamt erhält man

$$I = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} + 0 = \frac{1}{6}.$$

b) Über GREEN'schen Satz:

$$I = \int_C \underbrace{x^4}_P dx + \underbrace{xy}_Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\begin{aligned} D : 0 &\leq x \leq 1 \\ &0 \leq y \leq 1 - x \end{aligned}$$

$$I = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (y - 0) dy dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{6}.$$

Beispiel 6.7. Man berechne

$$\int_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy,$$

wobei \mathcal{C} die Kreislinie $x^2 + y^2 = 9$ darstellt.

Die direkte Berechnung des Kurvenintegrals ist praktisch unmöglich. Wir wählen den Weg über den GREEN'schen Satz:

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(7x + \sqrt{y^4 + 1})}_{=7} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\sin x})}_{=3} \right] dA = \iint_{\mathcal{D}} 4 dA = 4 \iint_{\mathcal{D}} dA.$$

Dabei ist \mathcal{D} die Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 9$ mit dem Radius $r = 3$. Ihr Flächeninhalt ist

$$A_K = \iint_{\mathcal{D}} dA = 9\pi.$$

Damit erhält man

$$I = 4 A_K = 36\pi.$$

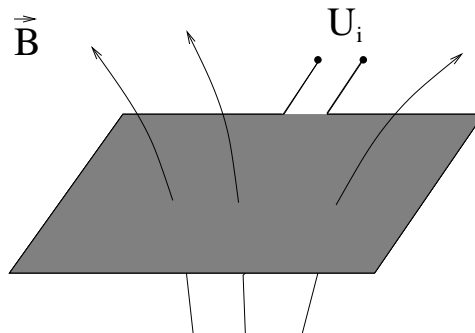
6.4. MAXWELL'sche Gleichungen

Sie bilden die Glanzstücke der mathematischen Physik des 19. Jahrhunderts und beschreiben alle Phänomene der klassischen Elektrodynamik.

Die Grundlage bilden vier physikalische Gesetzmäßigkeiten.

6.4.1. Das FARADAY'sche Induktionsgesetz

Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses in einer Leiterschleife induziert eine Spannung.



$$U_i = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_F \vec{B} d\vec{A}$$

Ist F zeitlich konstant, so folgt

$$U_i = -\iint_F \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) d\vec{A}$$

Die induzierte Spannung ist mit dem elektrischen Feld verknüpft über (siehe Bsp. 4.8)

$$U_i = \oint_C \vec{E} d\vec{x} = \iint_F \text{rot} \vec{E} d\vec{A}$$

Die letzte Umformung ergibt sich aus dem STOKES'schen Satz. Damit folgt

$$\iint_F \text{rot} \vec{E} d\vec{A} = \iint_F \left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) d\vec{A}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt schließlich

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}}$$

6.4.2. GAUSS'sches Gesetz der Elektrostatik

Der Fluss des elektrischen Feldes ist proportional zur Gesamtladung Q .

$$\iint_F \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

Dabei bezeichnet ε_0 die Dielektrizitätskonstante (= elektrische Feldkonstante) und F die den räumlichen Bereich B berandende Fläche.

Ist $\varrho(x, y, z)$ die Ladungsverteilung innerhalb des Bereichs B , so gilt

$$Q = \iiint_B \varrho(x, y, z) dV$$

Damit folgt

$$\frac{1}{\varepsilon_0} Q = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_B \varrho(x, y, z) dV = \iint_F \vec{E} d\vec{A}$$

Für das Doppelintegral gilt nach dem GAUSS'schen Integralsatz

$$\iint_F \vec{E} d\vec{A} = \iiint_B \text{div} \vec{E} dV$$

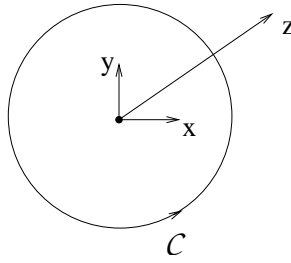
und damit erhält man

$$\iiint_B \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_B \varrho(x, y, z) dV$$

d.h.

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}}$$

D.h. die Quellen des elektrischen Feldes sind die Ladungsdichten.



6.4.3. AMPERE'sches Gesetz

Ein stromdurchflossener Leiter induziert ein Magnetfeld.

$$\oint_C \vec{B} d\vec{x} = \mu_0 I$$

Dabei weise der Stromfluss in Richtung der z -Achse.

Mit μ_0 bezeichnet man die Permeabilitätskonstante (= magnetische Feldkonstante).

Ist \vec{j} die Stromdichte innerhalb der durch C festgelegten Fläche F , dann ist der Strom gegeben durch

$$I = \iint_F \vec{j} d\vec{A}$$

Mit dem STOKES'schen Integralsatz folgt

$$\mu_0 I = \mu_0 \iint_F \vec{j} d\vec{A} = \oint_C \vec{B} d\vec{x} = \iint_F \text{rot} \vec{B} d\vec{A}$$

und schließlich

$$\iint_F \mu_0 \vec{j} d\vec{A} = \iint_F \text{rot} \vec{B} d\vec{A}$$

Diese Relation gilt für alle Flächen F und daher gilt die Relation

$$\boxed{\mu_0 \vec{j} = \text{rot} \vec{B}}$$

Da das Magnet quellenfrei ist (es gibt keine magnetischen Monopole), folgt

$$\boxed{\text{div} \vec{B} = 0}.$$

Damit erhält man die vier Gleichungen

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{6.3}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \tag{6.4}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \tag{6.5}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \tag{6.6}$$

Bildet man von (6.4) die Divergenz, so folgt wegen $\text{div}(\text{rot} \vec{K}) = 0$ für ein beliebiges Vektorfeld \vec{K}

$$\text{div} (\mu_0 \vec{j}) = 0$$

d.h. die Divergenz der Stromdichte ist Null, was allerdings im Widerspruch steht zur

6.4.4. Kontinuitätsgleichung

Die zeitliche Änderung der Gesamtladung in einem räumlichen Bereich B ist gleich dem Stromfluss durch seine Oberfläche F .

$$\frac{\partial}{\partial t} Q = \iiint_B \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, y, z) dV = - \iint_F \vec{j} d\vec{A} = - \iiint_B \operatorname{div} \vec{j} dV$$

wobei die letzte Umformung

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{j} dV = \iint_F \vec{j} d\vec{A}$$

aus dem GAUSS'schen Integralsatz folgt. Damit ergibt sich insgesamt:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\operatorname{div} \vec{j}} \quad \text{(Kontinuitätsgleichung)}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho \stackrel{(6.3)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}) = \operatorname{div} \left(-\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$$

$$\implies \operatorname{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) = 0$$

$$\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \dots \quad \text{MAXWELL'scher Gesamtstrom}$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \dots \quad \text{Verschiebungstrom}$$

Ersetzt man nun in Glg. (6.4) \vec{j} durch $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$, so sind die Gleichungen (6.3) – (6.6) widerspruchsfrei und man erhält die MAXWELL'schen Gleichungen für das Vakuum

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \end{aligned}$$

7. Partielle Differentialgleichungen

7.1. Wellengleichung

7.1.1. Homogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{homogene DGL:} & \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ \text{homogene RB:} & \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ \text{AB:} & \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

Produktansatz: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \implies$

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Superposition:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Bestimmung der Koeffizienten a_n, b_n aus den AB:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

7.1.2. Inhomogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{inhomogene DGL:} & \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + \varphi(x, t) \\ \text{homogene RB:} & \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ \text{AB:} & \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x, t) = w(x, t) + z(x, t)$ mit

- w Lösung der hom. DGL + hom. RB + AB
Lösung: Siehe 7.1.1
- z Lösung der inhom. DGL + hom. RB + hom. AB
– Ansatz für z :

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{7.1}$$

- Entwicklung von $\varphi(x, t)$ bzgl. x in eine Fourierreihe:

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{7.2}$$

Durch Einsetzen von (7.1) und (7.2) in die inhom. DGL erhält man nach Koeffizientenvergleich eine gewöhnliche DGL für $Z_n(t)$:

$$Z_n''(t) + c^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} Z_n(t) = \varphi_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

mit den AB $Z_n(0) = Z_n'(0) = 0$

7.1.3. Inhomogene Differentialgleichung und inhomogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{inhomogene DGL:} & \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} + \varphi(x, t) \\ \text{inhomogene RB:} & \quad u(0, t) = r(t), \quad u(l, t) = s(t) \\ \text{AB:} & \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x, t) = w(x, t) + z(x, t)$ mit

- $z(x, t) = r(t) + \frac{x}{l}(s(t) - r(t))$
- Für $w(x, t)$ ergibt sich damit eine DGL mit homog. RB:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= c^2 w_{xx} + \varphi^*(x, t) \\ w(0, t) &= w(l, t) = 0 \\ w(x, 0) &= f^*(x), \quad w_t(x, 0) = g^*(x) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, t) &= \varphi(x, t) - z_{tt}(x, t) \\ f^*(x) &= f(x) - z(x, 0) \\ g^*(x) &= g(x) - z_t(x, 0) \end{aligned}$$

Lösung: Siehe 7.1.2

7.2. Diffusionsgleichung

7.2.1. Homogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{homogene DGL:} & \quad u_t = c^2 u_{xx} \\ \text{homogene RB:} & \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ \text{AB:} & \quad u(x, 0) = f(x) \end{aligned}$$

Produktansatz: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \implies$

$$u_n(x, t) = a_n e^{-c^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Superposition:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Bestimmung des Koeffizienten a_n aus der AB:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

7.2.2. Inhomogene Differentialgleichung und homogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{inhomogene Dgl:} & \quad u_t = c^2 u_{xx} + \varphi(x, t) \\ \text{homogene RB:} & \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ \text{AB:} & \quad u(x, 0) = f(x) \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x, t) = w(x, t) + z(x, t)$ mit

- w Lösung der hom. DGL + hom. RB + AB
Lösung: Siehe 7.2.1
- z Lösung der inhom. DGL + hom. RB + hom. AB
– Ansatz für z :

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (7.3)$$

- Entwicklung von $\varphi(x, t)$ bzgl. x in eine Fourierreihe:

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (7.4)$$

Durch Einsetzen von (7.3) und (7.4) in die inhom. DGL erhält man nach Koeffizientenvergleich eine gewöhnliche DGL für $Z_n(t)$:

$$Z_n'(t) + c^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} Z_n(t) = \varphi_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

mit der AB $Z_n(0) = 0$

7.2.3. Inhomogene Differentialgleichung und inhomogene Randbedingung

$$\begin{aligned} \text{inhomogene DGL:} & \quad u_t = c^2 u_{xx} + \varphi(x, t) \\ \text{inhomogene RB:} & \quad u(0, t) = r(t), \quad u(l, t) = s(t) \\ \text{AB:} & \quad u(x, 0) = f(x) \end{aligned}$$

Ansatz: $u(x, t) = w(x, t) + z(x, t)$ mit

- $z(x, t) = r(t) + \frac{x}{l}(s(t) - r(t))$
- Für $w(x, t)$ ergibt sich damit eine DGL mit homog. RB:

$$\begin{aligned} w_t &= c^2 w_{xx} + \varphi^*(x, t) \\ w(0, t) &= w(l, t) = 0 \\ w(x, 0) &= f^*(x) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, t) &= \varphi(x, t) - z_t(x, t), \\ f^*(x) &= f(x) - z(x, 0). \end{aligned}$$

Lösung: Siehe 7.2.2.

7.3. Schwingende Membran

Wir betrachten einen Bereich B in der xy -Ebene, der von der „Randkurve“ ∂B begrenzt wird, siehe Abb. 7.1. Eine dünne, homogene Membran sei über ∂B gespannt.

Gesucht ist die Auslenkung

$$z = z(x, y, t)$$

der Membran aus der Ruhelage im Punkt (x, y) zur Zeit t .

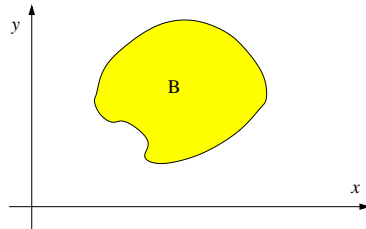


Abbildung 7.1.: Bereich

Differentialgleichung: Für alle $(x, y) \in B$, $t > 0$

$$z_{tt} = c^2 \cdot \Delta z = c^2 \cdot (z_{xx} + z_{yy}).$$

Randbedingung: Für alle $(x, y) \in \partial B$

$$z(x, y, t) = \varphi(x, y, t)$$

Anfangsbedingung: Für alle $(x, y) \in B$

$$z(x, y, 0) = f(x, y),$$

$$z_t(x, y, 0) = g(x, y).$$

Wir fordern (analog zur schwingenden Saite)

$$f(x, y) = g(x, y) = 0$$

für alle $(x, y) \in \partial B$.

Für einen beliebigen Bereich B kann die Lösung hier nicht angegeben werden. Wir betrachten nur den Spezialfall der rechteckigen Membran.

7.3.1. Rechteckige Membran

Betrachte

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}.$$

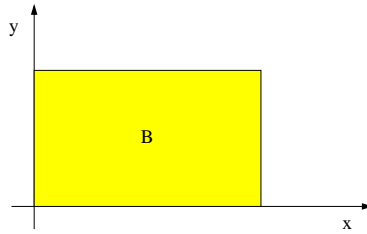


Abbildung 7.2.: Rechteckige Membran

Randbedingung: Für alle $0 \leq y \leq b$

$$z(0, y, t) = 0,$$

$$z(a, y, t) = 0.$$

Für alle $0 \leq x \leq a$

$$z(x, 0, t) = 0$$

Anfangsbedingung: Für alle $0 \leq x \leq a$

$$z(x, b, t) = 0.$$

Für alle $(x, y) \in B$

$$z(x, y, 0) = f(x, y),$$

$$z_t(x, y, 0) = g(x, y).$$

1. Trennung von Zeit- und Ortsvariablen:

$$z(x, y, t) = H(x, y) \cdot T(t),$$

$$z_{tt} = H(x, y) \cdot T''(t),$$

$$z_{xx} = H_{xx}(x, y) \cdot T(t),$$

$$z_{yy} = H_{yy}(x, y) \cdot T(t).$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt das

$$H \cdot T'' = c^2 \cdot (H_{xx} \cdot T + H_{yy} \cdot T)$$

und nach Division durch $c^2 \cdot H \cdot T$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{1}{H} (H_{xx} + H_{yy}) = \frac{\Delta H}{H} = \lambda = \text{const.},$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung für $T(t)$,

$$T'' - c^2 \cdot \lambda \cdot T = 0,$$

und eine partielle Differentialgleichung für $H(x, y)$ (HELMHOLTZ-Gleichung),

$$\Delta H - \lambda \cdot H = 0.$$

2. Trennung der Ortsvariablen:

$$\begin{aligned}H(x, y) &= F(x) \cdot G(y), \\H_{xx} &= F''(x) \cdot G(y), \\H_{yy} &= F(x) \cdot G''(y).\end{aligned}$$

Eingesetzt liefert das

$$F'' \cdot G + F \cdot G'' - \lambda \cdot F \cdot G = 0,$$

also

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} = \lambda$$

und somit

$$\underbrace{\frac{F''}{F}}_{\text{von } x \text{ abh.}} = \lambda - \underbrace{\frac{G''}{G}}_{\text{von } y \text{ abh.}} = \nu = \text{const.}$$

Es ergeben sich also die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}F'' - \nu \cdot F &= 0, \\G'' + (\nu - \lambda) \cdot G &= 0.\end{aligned}$$

3. Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingung:

$$\begin{aligned}z(0, y, t) = F(0) \cdot G(y) \cdot T(t) &= 0 && \Rightarrow F(0) = 0 \\z(a, y, t) = F(a) \cdot G(y) \cdot T(t) &= 0 && \Rightarrow F(a) = 0 \\z(x, 0, t) = F(x) \cdot G(0) \cdot T(t) &= 0 && \Rightarrow G(0) = 0 \\z(x, b, t) = F(x) \cdot G(b) \cdot T(t) &= 0 && \Rightarrow G(b) = 0.\end{aligned}$$

Für $F(x)$ ist folgendes Problem analog zum Problem bei der schwingenden Saite zu lösen:

$$F'' - \nu \cdot F = 0, \quad F(0) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Setze $\nu = -p^2$, $p \in \mathbb{R}$ und erhalte die Lösung

$$F(x) = A \cdot \cos px + B \cdot \sin px.$$

Die eingesetzte Randbedingung liefert

$$\begin{aligned}F(0) = 0 : & && A = 0 \\F(a) = 0 : & && B \cdot \sin pa = 0,\end{aligned}$$

somit $B = 0$ oder $\sin pa = 0$, was wiederum $pa = m\pi$, $m \in \mathbb{N}$, bedeutet. Somit $p = \frac{m\pi}{a}$, also sind die Eigenwerte

$$\nu = -p^2 = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

und die Eigenfunktionen

$$F_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} \cdot x, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Für $G(y)$ ist folgendes Problem zu lösen:

$$G'' + (\nu - x) \cdot G = 0, \quad G(0) = 0, \quad G(b) = 0.$$

Setze $\nu - \lambda = q^2$, somit

$$G(y) = A \cos qy + B \sin qy.$$

Die Randbedingung liefert

$$\begin{aligned} G(0) = 0 : & \quad A = 0 \\ G(b) = 0 : & \quad B \cdot \sin qb = 0, \end{aligned}$$

somit $qb = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, also $q = \frac{n\pi}{b}$. Das liefert die Eigenfunktionen

$$G_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} \cdot y, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die gemeinsamen Eigenwerte sind also

$$\lambda_{m,n} = \nu - q^2 = - \left(\frac{m\pi}{n} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2.$$

Differentialgleichung für $T(t)$:

$$T'' - c^2 \lambda T = 0.$$

Setze

$$\lambda_{m,n} = -\mu_{mn}^2 = - \left(\left(\frac{m\pi}{n} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right),$$

somit

$$T'' + c^2 \cdot \mu_{mn}^2 \cdot T = 0,$$

d.h.

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cdot \cos c\mu_{mn}t + B_{mn} \cdot \sin c\mu_{mn}t.$$

Zusammen ergibt das

$$\begin{aligned} z_{mn}(x, y, t) &= F_m(x) \cdot G_n(y) \cdot T_{mn}(t) \\ &= (A_{mn} \cdot \cos c\mu_{mn}t + B_{mn} \cdot \sin c\mu_{mn}t) \cdot \sin \frac{m\pi}{a}x \cdot \sin \frac{n\pi}{b}y. \end{aligned}$$

Die Funktionen $z_{mn}(x, y, t)$ erfüllen die Differentialgleichung und die Randbedingung!

4. **Superpositionsprinzip und Berücksichtigung der Anfangsbedingung:** Setze

$$\begin{aligned} z(x, y, t) &= \sum_{m,n} z_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cdot \cos c\mu_{mn}t + B_{mn} \cdot \sin c\mu_{mn}t) \cdot \sin \frac{m\pi}{a}x \cdot \sin \frac{n\pi}{b}y. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung lautet

$$\begin{aligned} z(x, y, 0) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a}x \cdot \sin \frac{n\pi}{b}y \stackrel{!}{=} f(x, y), \\ z_t(x, y, 0) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cdot c \cdot \mu_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a}x \cdot \sin \frac{n\pi}{b}y \stackrel{!}{=} g(x, y). \end{aligned}$$

- a) Wir setzen f und g schiefssymmetrisch auf $-a < x < a$ bzw. $-b < y < b$ fort.
 b) Wir setzen f und g periodisch mit der Periode $2a$ (in x) und $2b$ (in y) fort.

Jedenfalls können f und g in Doppel-Fourier-Sinusreihen entwickelt werden:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

somit

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b f(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy,$$

$$b_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b g(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy.$$

Koeffizientenvergleich in der Anfangsbedingung liefert schließlich

$$A_{mn} = a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b f(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy,$$

$$B_{mn} = b_{mn} = \frac{4}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b g(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy.$$

7.3.2. Kreisförmige Membran

Differentialgleichung

$$U_{tt} = c^2(U_{xx} + U_{yy}) \quad \text{in } K_R$$

mit $K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$,

Randbedingung

$$U = 0 \quad \text{auf } \partial K_R,$$

Anfangsbedingungen folgen später.

Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \varphi & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Somit

$$r_x = \frac{x}{r},$$

$$\varphi_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2}.$$

Mit $U(x, y, t) = u(r, \phi, t)$ gilt also

$$\begin{aligned}
 U_{tt} &= u_{tt} \\
 U_x &= u_r r_x + u_\varphi \varphi_x = \frac{x}{r} u_r - \frac{y}{r^2} u_\varphi \\
 U_{xx} &= \frac{1}{r} u_r - \frac{x^2}{r^3} u_r + \frac{x}{r} \left(\frac{x}{r} u_{rr} - \frac{y}{r^2} u_{r\varphi} \right) + \frac{2xy}{r^4} u_\varphi - \frac{xy}{r^3} u_{r\varphi} + \frac{y^2}{r^4} u_{\varphi\varphi} = \\
 &= \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - \frac{2xy}{r^3} u_{r\varphi} + \frac{y^2}{r^4} u_{\varphi\varphi} + \frac{y^2}{r^3} u_r + \frac{2xy}{r^4} u_\varphi \\
 U_{yy} &= \frac{y^2}{r^2} u_{rr} - \frac{2xy}{r^3} u_{r\varphi} + \frac{x^2}{r^4} u_{\varphi\varphi} + \frac{x^2}{r^3} u_r + \frac{2xy}{r^4} u_\varphi \quad (\text{analog}) \\
 U_{tt} &= c^2 (U_{xx} + U_{yy}) \\
 u_{tt} &= c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \right) = c^2 \Delta u.
 \end{aligned}$$

Annahme: radialsymmetrisches Problem, d.h. u hängt nicht vom Winkel φ ab. Dies führt zur Differentialgleichung

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$$

mit der Randbedingung

$$u(R, t) = 0$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(r, 0) = f(r)$$

$$u_t(r, 0) = g(r).$$

(Annahme: AB seien auch radialsymmetrisch, da diese auf radialsymmetrische Lösungen führen.)

1. Schritt Produktansatz:

$$u(r, t) = W(r)T(t).$$

Somit

$$\begin{aligned}
 WT'' &= c^2 \left(W''T + \frac{1}{r} W'T \right) \\
 \frac{T''}{c^2 T} &= \frac{1}{W} \left(W'' + \frac{1}{r} W' \right) = -k^2
 \end{aligned}$$

(wobei k konstant), also

$$W'' + \frac{1}{r} W' + k^2 W = 0 \tag{7.5}$$

$$T'' + k^2 c^2 T = 0 \tag{7.6}$$

mit der Randbedingung

$$u(R, t) = W(R)T(t) = 0$$

$$W(R) = 0.$$

2. Schritt Lösen der Differentialgleichung für W :

$$s = kr, \quad W(r) = w(s), \quad W' = w' \frac{ds}{dr} = kw, \quad W'' = k^2 w''.$$

Aus (7.5) ergibt sich

$$k^2 w'' + \frac{k}{s} kw' + k^2 w = 0,$$

also

$$w'' + \frac{w'}{s} + w = 0,$$

eine BESSELSche Differentialgleichung (siehe Anhang A.2) zum Index $\nu = 0$ mit der Lösung

$$w(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s).$$

Da $Y_0(s)$ für $s \rightarrow 0$ gegen ∞ strebt, die Lösung aber für $r \rightarrow 0$ beschränkt sein soll, wählen wir $c_2 = 0$. D.h.

$$W(r) = J_0(kr).$$

Die Randbedingung lautet

$$W(R) = J_0(kR) = 0.$$

Wähle k so, dass kR eine Nullstelle der BESSELFunktion J_0 ist:

$$kR = \alpha_m$$

mit $J_0(\alpha_m) = 0$ für $m = 1, 2, \dots$

Eigenwerte:

$$k_m = \frac{\alpha_m}{R},$$

Eigenfunktionen:

$$W_m(r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right).$$

Für $T(t)$ gilt

$$\begin{aligned} T'' + k_m^2 c^2 T &= 0, & k_m c &= \lambda_m \\ T'' + \lambda_m^2 T &= 0, \end{aligned}$$

also

$$T(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t.$$

Damit ist

$$u_m(r, t) = W_m(r)T_m(t) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t).$$

Eigenschwingungen: Die Frequenz ist

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{\lambda_m}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} k_m \\ v_1 &= \frac{c}{2\pi} k_1 = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{\alpha_1}{R} \\ v_2 &= \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{\alpha_2}{R}. \end{aligned}$$

3. Schritt Superposition:

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right)$$

ist Lösung der Differentialgleichung, die die Randbedingung erfüllt. Betrachte Anfangsbedingung

$$u(r, 0) = f(r),$$

also

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) = f(r).$$

Satz 7.1. Für jedes feste $n \in \mathbb{N}_0$ bilden die BESSELFunktionen

$$J_n \left(\frac{\alpha_1}{R} r \right), J_n \left(\frac{\alpha_2}{R} r \right), \dots$$

auf $[0, R]$ eine orthogonale Funktionenfamilie bzgl. der Gewichtsfunktion $\rho = r$, d.h.

$$\begin{aligned} \left\langle J_n \left(\frac{\alpha_i}{R} r \right), J_n \left(\frac{\alpha_j}{R} r \right) \right\rangle &= \int_0^R r J_n \left(\frac{\alpha_i}{R} r \right) J_n \left(\frac{\alpha_j}{R} r \right) dr = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_i) & \text{für } i = j \end{cases}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$a_m = \frac{\int_0^R r f(r) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) dr}{\int_0^R r J_0^2 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) dr} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) dr.$$

Aus dem 2. Anfangswert

$$u_t(r, 0) = g(r)$$

ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \lambda_m J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) = g(r)$$

und somit

$$\begin{aligned} b_m \lambda_m &= \frac{\int r g(r) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) dr}{\frac{R^2 J_1^2(\alpha_m)}{2}} \\ b_m &= \frac{2}{\lambda_m R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) dr. \end{aligned}$$

7.4. Potential einer Kugel

Wir betrachten die Potentialgleichung im \mathbb{R}^3

$$\Delta U = 0$$

in $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ oder $x^2 + y^2 + z^2 > R^2$, wobei einmal der Innenraum und dann der Außenraum der Kugel mit dem Radius R betrachtet wird.

In Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad U(x, y, z) = u(r, \varphi, \vartheta)$$

und somit

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta} + \frac{\cot \vartheta}{r^2}u_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta}u_{\varphi\varphi} \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Auf der Kugeloberfläche $K : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sei eine elektrische Ladungsverteilung von folgender Form vorgegeben:

$$u(R, \varphi, \vartheta) = f(\vartheta).$$

Gesucht ist das elektrostatische Potential im Innenraum bzw. im Außenraum. Im zweiten Fall tritt noch die Bedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \varphi, \vartheta) = 0$$

dazu.

Da das Potential auf K nicht vom Winkel φ abhängt, wird es im Raum von φ unabhängig sein, d.h. $u = u(r, \vartheta)$. Wir betrachten also folgendes Randwertproblem:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) = 0 \quad (7.7)$$

$$u(R, \vartheta) = f(\vartheta) \quad (7.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \vartheta) = 0 \quad (\text{für Außenraumproblem}). \quad (7.9)$$

Produktansatz

$$u(r, \vartheta) = G(r) \cdot H(\vartheta),$$

also

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} (r^2 G'(r)) = - \frac{1}{H \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta H'(\vartheta)) = k \quad (\text{const.})$$

und somit

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta H') + kH = 0 \quad (7.10)$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 G') - kG = 0. \quad (7.11)$$

Lösung von (7.11)

$$r^2 G'' + 2rG' - kG = 0,$$

eine Euler'sche Differentialgleichung, die mit dem Ansatz $G(r) = r^\alpha$ auf

$$\alpha^2 + \alpha - k = 0,$$

also

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + k}$$

führt. Zur Vereinfachung setzen wir $k = n(n+1)$, somit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= n, & \alpha_2 &= -(n+1) \\ G_n(r) &= r^n, & G_n^* &= r^{-n-1}. \end{aligned}$$

Lösung von (7.10) Substituiere

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &=: w \\ \sin^2 \vartheta &= 1 - w^2 \\ \frac{d}{d\vartheta} &= -\sin \vartheta \frac{d}{dw} \\ H(\vartheta) &= \hat{H}(w) \end{aligned}$$

und erhalte so

$$(1 - w^2)\hat{H}'' - 2w\hat{H}' + n(n+1)\hat{H} = 0$$

(Legendre'sche Differentialgleichung, siehe Anhang A.1). Für $n = 0, 1, 2, \dots$ erhalten wir als Lösungen die Legendre'schen Polynome

$$\hat{H}_n(w) = P_n(w) = P_n(\cos \vartheta).$$

Anmerkung: Man kann zeigen, dass es notwendig ist, $n \in \mathbb{N}_0$ zu wählen, um eine auf $-1 \leq w \leq 1$ oder $0 \leq \vartheta \leq \pi$ stetig differenzierbare Funktion zu erhalten. Damit gilt

$$\begin{aligned} u_n &= A_n r^n P_n(\cos \vartheta), & A_n &\in \mathbb{R} & \text{(für Innenraumaufgaben geeignet),} \\ u_n^* &= \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta), & B_n &\in \mathbb{R} & \text{(für Außenraumaufgaben geeignet).} \end{aligned}$$

7.4.1. Innenraumproblem

Die Funktionen u_n sind Lösungen der Differentialgleichung (7.7), die im Ursprung regulär sind. Eine Superposition liefert

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta).$$

Die Randbedingung (7.8) lautet

$$u(R, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \vartheta) = f(\vartheta).$$

Die Funktion f wird also (in eine verallgemeinerte Fourier-Reihe) nach den Legendre-Polynomen entwickelt:

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= f(\arccos(\cos \vartheta)) = \tilde{f}(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(\cos \vartheta) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\int_{-1}^1 \tilde{f}(w) P_n(w) dw}{\int_{-1}^1 P_n^2(w) dw} \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst $A_n = \frac{\beta_n}{R^n}$ und schließlich für die Lösung des Innenraumproblems

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta)$$

mit

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

7.4.2. Außenraumproblem

Die Funktion

$$u^*(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta)$$

erfüllt die Differentialgleichung (7.7) und die Randbedingung (7.9). Analog zu den vorigen Überlegungen folgt aus der Randbedingung (7.8)

$$\frac{B_n}{R^{n+1}} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

die Lösung des Außenraumproblems in der Form

$$u^*(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta)$$

mit

$$B_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1} \int_0^\pi f(\vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

7.5. Wärmeleitung auf der Kreisscheibe

Wir lösen das Wärmeleitungsproblem

$$\Delta u = a^2 u_t$$

mit

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, 0) &= f(\vec{x}) && \text{für } \|\vec{x}\| \leq R, \\ u(\vec{x}, t) &= 0 && \text{für } \|\vec{x}\| = R, \\ \text{bzw. } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}, t) &= 0 && \text{für } \|\vec{x}\| = R. \end{aligned}$$

Dazu setzen wir $u(\vec{x}, t) = \tilde{X}(\vec{x})T(t)$ an. Dies ergibt für die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\Delta \tilde{X}}{\tilde{X}} = a^2 \frac{T'}{T}.$$

Da die linke Seite nur von der Ortsvariablen, die rechte nur von der Zeit abhängt, müssen beide konstant sein, also $= -\mu^2$ (die Wahl der Konstanten ≤ 0 wird sich später rechtfertigen). Wir bekommen daher zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{X} &= -\mu^2 \tilde{X}, \\ a^2 T' &= -\mu^2 T. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung wird durch $T(t) = \exp\left(-\frac{\mu^2}{a^2}t\right)$ gelöst; die erste bleibt noch zu lösen. Dazu führen wir Polarkoordinaten ein und erhalten mit $\tilde{X}(\vec{x}) = X(r, \varphi)$

$$\Delta X(r, \varphi) = \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} = -\mu^2 X.$$

Mit dem Produktansatz $X(r, \varphi) = P(r)\Phi(\varphi)$ erhält man

$$P''\Phi + \frac{1}{r}P'\Phi + \frac{1}{r^2}P\Phi'' = -\mu^2 P\Phi$$

und nach Division durch $P\Phi$ und Ordnen

$$r^2 \frac{P''}{P} + r \frac{P'}{P} + \mu^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Die linke Seite hängt nur von r , die rechte nur von φ ab, wodurch beide Seiten konstant $= -\lambda^2$ sein müssen.

Wir lösen zuerst

$$\Phi'' = -\lambda^2 \Phi,$$

wobei sich aus der notwendigen Periodizität von Φ die periodischen Randbedingungen

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad \text{und} \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

ergeben. Die Lösungen lauten dann

$$\Phi(\varphi) = A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi,$$

wobei die Randbedingungen noch zu erfüllen sind:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= A = \Phi(2\pi) = A \cos 2\lambda\pi + B \sin 2\lambda\pi \\ \Phi'(0) &= \lambda B = \Phi'(2\pi) = -\lambda A \sin 2\lambda\pi + \lambda B \cos 2\lambda\pi. \end{aligned}$$

Als Gleichungssystem in A und B aufgefasst, hat dies genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die Determinante

$$\lambda ((\cos 2\lambda\pi - 1)^2 + \sin^2 2\lambda\pi)$$

verschwindet. Dies ist offensichtlich nur für $\lambda \in \mathbb{Z}$ möglich (wir wählen $\lambda = k \in \mathbb{N}_0$).

Es verbleibt noch die Gleichung

$$P'' + \frac{1}{r}P' - \frac{k^2}{r^2}P = \frac{1}{r} \left((rP)' - \frac{k^2}{r} \right) = -\mu^2 P \quad (7.12)$$

unter der Randbedingung $P(R) = 0$ (bzw. $P'(R) = 0$) zu lösen. Eine zweite Randbedingung wird sich aus $|P(0)| < \infty$ ergeben. Die obige Gleichung ist der BESSELSchen Differentialgleichung sehr ähnlich und kann durch die Variablensubstitution $t = \mu r$ auf eine solche transformiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{dP}{dt} \frac{dt}{dr} = \mu \frac{dP}{dt} \\ \frac{d^2P}{dr^2} &= \frac{d^2P}{dt^2} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 = \mu^2 \frac{d^2P}{dt^2} \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{t^2}{\mu^2} \mu^2 \ddot{P} + \frac{t}{\mu} \mu \dot{P} + (t^2 - k^2)P = 0.$$

Lösungen dieser Gleichung können durch die BESSEL-Funktionen erster Art J_k und die BESSEL-Funktionen zweiter Art Y_k angegeben werden (siehe Anhang A.2). Die Randbedingung, dass P im Ursprung beschränkt bleiben soll, führt dazu, dass der Anteil von Y_k an der Lösung verschwinden muss. Es gilt daher

$$P(r) = J_k(\mu r),$$

wobei nun noch die zweite Randbedingung $P(R) = 0$ (bzw. $P'(R) = 0$) erfüllt werden muss. Wir bezeichnen nun mit $\mu_i^{(k)}$ die i -te Nullstelle der k -ten BESSEL-Funktion (bzw. mit $\nu_i^{(k)}$ die i -te Nullstelle der Ableitung der k -ten BESSEL-Funktion); wegen der Gleichung (7.12) sind die Funktionen $J_k(\mu r)$ genau für

$$\mu = \frac{\mu_i^{(k)}}{R} \quad \text{bzw.} \quad \mu = \frac{\nu_i^{(k)}}{R}$$

Lösungen des obigen Randwertproblems.

Wir haben also spezielle Lösungen folgender Gestalt erhalten ($i \geq 1, k \geq 0$):

$$u_{i,k}(\vec{x}, t) = J_k \left(\frac{\mu_i^{(k)}}{R} r \right) (A \cos k\varphi + B \sin k\varphi) \exp \left(- \left(\frac{\mu_i^{(k)}}{aR} \right)^2 t \right)$$

(bzw. analoge Lösungen unter Verwendung von $\nu_i^{(k)}$). Es verbleibt noch nachzuprüfen, ob mit Linearkombinationen dieser Lösungen *alle* Anfangsbedingungen erfüllt werden können. Dazu bemerken wir wieder, dass nach dem Entwicklungssatz die Linearkombinationen der Eigenfunktionen von (7.12) dicht im Raum der stetigen Funktionen auf $[0, R]$ liegen; ebenso liegen die trigonometrischen Funktionen dicht im Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$.

Dann liegen aber nach dem Satz von Stone-Weierstraß die Produkte solcher Funktionen dicht im Raum der stetigen Funktionen auf dem Kreis.

Letztendlich müssen wir noch klären, wie die Koeffizienten in der Entwicklung einer Funktion $f(x) = f(r, \varphi)$ nach den oben erhaltenen Funktionen zu gewinnen sind. Dazu bemerken wir, dass wegen der Orthogonalität von Eigenfunktionen von Sturm-Liouville-Problemen die Lösungen $J_k\left(\frac{\mu_i^{(k)}}{R}r\right)$ paarweise orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle p, q \rangle = \int_0^R p(r)q(r) r dr$ sind. Daher sind alle erhaltenen speziellen Lösungen paarweise orthogonal bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \varphi)g(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Die Koeffizienten $a_i^{(k)}$ und $b_i^{(k)}$ in der Entwicklung

$$f(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(0)} J_0\left(\mu_i^{(0)} \frac{r}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right) \left(a_i^{(k)} \cos k\varphi + b_i^{(k)} \sin k\varphi\right)$$

können daher durch

$$\begin{aligned} a_i^{(0)} &= \frac{1}{2\pi A_i^{(0)}} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_0\left(\mu_i^{(0)} \frac{r}{R}\right) f(r, \varphi) r dr d\varphi \\ A_i^{(0)} &= \int_0^R J_0\left(\mu_i^{(0)} \frac{r}{R}\right)^2 r dr \\ a_i^{(k)} &= \frac{1}{\pi A_i^{(k)}} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right) f(r, \varphi) r \cos k\varphi dr d\varphi \\ b_i^{(k)} &= \frac{1}{\pi A_i^{(k)}} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right) f(r, \varphi) r \sin k\varphi dr d\varphi \\ A_k^{(k)} &= \int_0^R J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right)^2 r dr \end{aligned}$$

berechnet werden.

Als endgültige Lösung ergibt sich nun

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) = u(r, \varphi, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(0)} J_0\left(\mu_i^{(0)} \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{aR}\right)^2 t\right) + \\ &\quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} J_k\left(\mu_i^{(k)} \frac{r}{R}\right) \left(a_i^{(k)} \cos k\varphi + b_i^{(k)} \sin k\varphi\right) \exp\left(-\left(\frac{\mu_i^{(k)}}{aR}\right)^2 t\right), \end{aligned}$$

bzw. ein analoger Ausdruck mit $\nu_i^{(k)}$. Im Falle einer radialsymmetrischen Anfangsbedingung treten nur die Terme mit J_0 auf.

A. Potenzreihenansätze bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

A.1. Lösungen bei regulären Koeffizienten

Definition A.1. Ein Punkt, in dem die Koeffizienten p und q der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

analytisch sind, heißt *regulärer Punkt* der Differentialgleichung.

Für eine solche Differentialgleichung kann man Lösungen mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

finden, wenn x_0 ein regulärer Punkt ist (Potenzreihenansatz).

Beispiel A.1 (LEGENDRE'sche Differentialgleichung). Betrachte

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $x_0 = 0$ ein regulärer Punkt.

Ansatz:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m.$$

In die Differentialgleichung eingesetzt liefert dies

$$(1 - x^2) \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1} + \nu(\nu+1) \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0,$$

also

$$\sum_{m=0}^{\infty} ((m+1)(m+2)a_{m+2} + (\nu-m)(\nu+m+1)a_m) x^m = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformel

$$a_{m+2} = -\frac{(\nu-m)(\nu+m+1)}{(m+1)(m+2)}, \quad a_m, m \geq 0.$$

Somit für

$$\begin{aligned}
 m = 0 : \quad & a_2 = -\frac{\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2} a_0, \\
 m = 1 : \quad & a_3 = -\frac{(\nu-1)(\nu+2)}{2 \cdot 3} a_1, \\
 m = 2 : \quad & a_4 = -\frac{(\nu-2)(\nu+3)}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!} a_0, \\
 m = 3 : \quad & a_5 = -\frac{(\nu-3)(\nu+4)}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+2)(\nu+4)}{5!} a_1.
 \end{aligned}$$

Im Allgemeinen gilt also

$$\begin{aligned}
 a_{2k} &= (-1)^k \frac{\nu(\nu-2) \cdots (\nu+2-2k)(\nu+1)(\nu+3) \cdots (\nu+2k-1)}{(2k)!} a_0, \\
 a_{2k+1} &= (-1)^k \frac{(\nu-1)(\nu-3) \cdots (\nu-2k+1)(\nu+2)(\nu+4) \cdots (\nu+2k) \cdots (\nu+2k)}{(2k+1)!} a_1.
 \end{aligned}$$

Damit folgt die Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = a_0 p_\nu(x) + a_1 q_\nu(x)$$

mit

$$\begin{aligned}
 p_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\nu(\nu-2) \cdots (\nu+2-2k)(\nu+1) \cdots (\nu+2k-1)}{(2k)!} x^{2k}, \\
 q_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu-1)(\nu-3) \cdots (\nu-2k+1)(\nu+2) \cdots (\nu+2k)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.
 \end{aligned}$$

Bemerkung. Die beiden Reihen konvergieren für $|x| < 1$, die Funktionen p_ν und q_ν sind linear unabhängig.

Spezialfall $\nu = n \in \mathbb{N}$.

Rekursionsformel

$$a_{m+2} = -\frac{(\nu-m)(\nu+m+1)}{(m+1)(m+2)} a_m, \quad a_m, m \geq 0,$$

also für $m = 0$

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \cdots = 0.$$

Für n gerade bricht die Reihe $p_n(x)$ bei x^n ab, die Reihe $q_n(x)$ bricht nicht ab.

Für n ungerade bricht umgekehrt die Reihe $p_n(x)$ nicht ab, die Reihe $q_n(x)$ bricht bei x^n ab.

Die allgemeine Lösung enthält daher auf jeden Fall ein Polynom $P_n(x)$ und eine unendliche Reihe $Q_n(x)$.

Um P_n anzugeben, ist es üblich, a_n so zu wählen, dass $P_n(1) = 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}, \\ a_{n-2} &= -\frac{(n-1)n}{2(2n-1)}a_n = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}, \\ a_{n-4} &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}, \\ a_{n-2k} &= \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}, \end{aligned}$$

also

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

mit

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Somit:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned}$$

Für Q_n gilt

$$Q_n(x) = \begin{cases} p_n(1)q_n(x) & n \text{ gerade} \\ -q_n(1)p_n(x) & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad |x| < 1$$

(die LEGENDRE-Funktion 2. Art).

Die allgemeine Lösung ist dann

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A.2. Lösungen bei schwach singulären Koeffizienten

Definition A.2. Die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

haben in $x = x_0$ eine Singularität. Der Punkt x_0 heißt *schwach singulär*, falls die Funktionen

$$(x - x_0) \cdot p(x) \quad \text{und} \quad (x - x_0)^2 \cdot q(x)$$

in x_0 analytisch sind.

Die Potenzreihenmethode ist dann nicht mehr direkt anwendbar. Man verwendet einen modifizierten Ansatz von der Form

$$y(x) = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad s \in \mathbb{R}$$

(FROBENIUS-Methode).

Beispiel A.2 (BESSEL'sche Differentialgleichung). Betrachte

$$x^2 y'' + xy' + (x' - \nu^2)y = 0, \quad \nu \geq 0.$$

Sei zunächst $x > 0$. Somit ist $x_0 = 0$ ein schwach singulärer Punkt. Der Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

führt auf

$$(s^2 - \nu^2)a_0 x^s + ((s+1)^2 - \nu^2) a_1 x^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty} (((s+n)^2 - \nu^2) a_n + a_{n-2}) x^{n+s} = 0,$$

somit

$$(s^2 - \nu^2)a_0 = 0$$

(Index-Gleichung), also

$$s_{1,2} = \pm \nu, \quad a_0 \neq 0.$$

Da $\nu > 0$ verschwindet für $s_1 = \nu$ die Lösung im Ursprung, für $s_2 = -\nu$ wird die Lösung im Ursprung unendlich!

1. $s_1 = \nu$:

$$(2\nu + 1)a_1 = 0 \quad \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_n = -\frac{-a_{n-2}}{n(2\nu + n)},$$

also

$$a_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (\nu + k)(\nu + k - 1) \cdots (\nu + 1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Einschub:

Gamma-Funktion Die Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ ist definiert als

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (\text{konvergent f\u00fcr } x > 0),$$

$$\Gamma(1) = 1.$$

Partielle Integration liefert

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x),$$

also

$$\Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma(4) = 6,$$

im Allgemeinen

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{f\u00fcr } n \in \mathbb{N}_0.$$

$\Gamma(x)$ ist also eine Verallgemeinerung der Fakult\u00e4t!

Im Beispiel bedeutet das

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k 2^\nu \Gamma(\nu+1) a_0}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu+1+k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

somit

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^\nu \Gamma(\nu+1)}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu+1+k)} x^{2k+\nu}.$$

Es ist \u00fcblich,

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

zu w\u00e4hlen und die L\u00f6sung dann mit J_ν zu bezeichnen, also

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu+1+k)}$$

(BESSEL-Funktion 1. Art zum Index ν , entspricht der regul\u00e4ren L\u00f6sung).

2. $s_2 = -\nu$ (singul\u00e4re L\u00f6sung suchen):

$$(-2\nu+1)a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

mit der Forderung $\nu \neq \frac{1}{2}$. (Der Fall $\nu = \frac{1}{2}$ wird sp\u00e4ter behandelt.)

Es folgt mit

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2\nu)}, \quad n \geq 2,$$

die Besselfunktion 1. Art zum Index $-\nu$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu} k! \Gamma(-\nu+k+1)}.$$

Bemerkung (ohne Beweis). $J_\nu, J_{-\nu}$ konvergieren f\u00fcr alle x , sie sind linear unabh\u00e4ngig, falls $\nu \notin \mathbb{N}$.

Die allgemeine Lösung ist dann

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

Falls $\nu = n, n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(x) = \infty \quad \text{für } x = 0, -1, -2, -3, \dots,$$

also

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k-n}}{2^{2k-n} k!} \cdot \underbrace{\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)}}_{=0} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-n}}{2^{2k-n} k! \Gamma(-n+k+1)} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n} k! \Gamma(n+k+1)} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

J_n und J_{-n} sind also linear abhängig!

Gesucht ist nun eine zweite, von J_n linear unabhängige Lösung. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, eine davon ist

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

(ohne Beweis).

Für $\nu \notin \mathbb{Z}$ ist Y_ν eine Linearkombination von J_ν und $J_{-\nu}$, linear unabhängig von J_ν .

Für $\nu = n, n \in \mathbb{N}$ ist Y_n nicht definiert, aber

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x).$$

Dieser Grenzwert existiert, ist Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung und linear unabhängig von J_n .

$Y_\nu(x)$ wird die BESSEL-Funktion 2. Art zum Index ν genannt.

Die Lösung ist in diesem Fall also

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x), \quad \nu \geq 0.$$

Im Fall $\nu = \pm \frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, & x > 0, \\ J_{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, & x > 0 \end{aligned}$$

(ohne Beweis).